

fiche methodes etude fonctions

Voici la marche à suivre pour étudier une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[a ; b]$ . Le but ultime de cette étude est le tracé de la courbe  $\mathcal{C}$  représentant  $f$ , avec un maximum de renseignements.

**1. Calcul de la dérivée de  $f$**

- En essayant de la mettre sous forme factorisée, ou sous la forme  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  où  $P$  et  $Q$  sont factorisés.
- On évitera de développer, en particulier les dénominateurs, surtout si ce sont des « carrés ».

**2. Etude du signe de  $f'$**

- Si  $f$  est sous la forme  $ax + b \rightarrow$  Petit tableau de signe.
- Si  $f$  est sous la forme  $ax^2 + bx + c \rightarrow$  calcul du discriminant  $\Delta$  et interprétation.
- Si  $f$  est un quotient, on étudie le signe du numérateur et du dénominateur. En particulier, on se souviendra que si l'un des deux est un carré, il est toujours positif.
- Si  $f$  contient des fonctions  $\cos$  et/ou  $\sin$ , on sera ramené à la résolution d'inéquations trigonométriques (le cercle peut être très utile) où l'on oubliera pas que  $\cos x$  et  $\sin x$  sont toujours compris entre  $-1$  et  $1$ .

**3. Tableau de variation de  $f$**

- On traduit l'étude du signe de la dérivée :  $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  croissante et  $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  décroissante.
- Quand  $f'(x) = 0$ , cela signifie que  $\mathcal{C}$  admet une tangente horizontale (maximum, minimum ou point d'inflexion).
- Ne pas oublier de calculer les valeurs de  $f$  aux points remarquables (bornes de l'ensemble de définition, maximum...)

**4. Recherche des points d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  avec les axes ( $O_x$ ) et ( $O_y$ )**

- Intersection de  $\mathcal{C}$  avec ( $O_x$ ) : On cherche le(les) nombres  $x_0$  tel que  $f(x_0) = 0$   
 $\rightarrow \mathcal{C}$  coupe ( $O_x$ ) au(x) point(s) de coordonnées  $(x_0 ; 0)$
- Intersection de  $\mathcal{C}$  avec ( $O_y$ ) : On calcule  $f(0)$   
 $\rightarrow \mathcal{C}$  coupe ( $O_y$ ) au point de coordonnées  $(0 ; f(0))$

**5. Tangentes à la courbe aux points remarquables**

- On connaît déjà les tangentes horizontales (voir 2. et 3.)
- On détermine la (les) tangente(s) au(x) point(s) d'intersection avec les axes, déterminé(s) dans le 4. en utilisant la formule :  

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

**6. Construction de la courbe**

- Tracer les deux axes, en respectant bien l'échelle donnée dans l'énoncé, et en restreignant l'axe ( $O_x$ ) à l'ensemble de définition de la fonction.
- Placer les points d'intersection avec les axes, les maximums, minimums, points d'inflexion.
- Construire les tangentes (inutile de tracer « entièrement » la droite, se contenter du petit morceau autour du point de tangence).
- Construire la courbe en lissant autant que possible, et évitant les points anguleux.

**Exemple :**

Soit  $f$  définie sur  $[-2 ; 5]$  par :  

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

1.  $f'(x) = 2x - 2$

2. Tableau de signe de  $f'$  :

$x$	-2	1	5
$f'(x)$	-	0	+

3. Avant de faire le tableau, calculons :

$f(-2) = 5 ; f(1) = -4 ; f(5) = 12$

$x$	-2	1	5
$f(x)$	5	-4	12

Le minimum de  $f$  sur  $[-2 ; 5]$  est  $-4$  et il est atteint pour  $x = 1$ .

4.

- Intersection avec ( $O_x$ ) :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 = 4^2$

$x_1 = \frac{-(-2) - 4}{2 \times 1} = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$x_2 = \frac{-(-2) + 4}{2 \times 1} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$\rightarrow$  donc  $\mathcal{C}$  coupe ( $O_x$ ) aux points **A (-1 ; 0)** et **B (3 ; 0)**

- Intersection avec ( $O_y$ ) :  $f(0) = -3$

$\rightarrow$  donc  $\mathcal{C}$  coupe ( $O_y$ ) au point de coordonnées **C (0 ; -3)**

5. En A :  $f'(-1) = -4 \rightarrow y = -4x - 4$

En B :  $f'(3) = 4 \rightarrow y = 4x - 12$

En C :  $f'(0) = -2 \rightarrow y = -2x - 3$

6.

