VECTEURS DE L'ESPACE

I) Vecteur de l'espace

1)si A, B sont deux points dans l'espace $\mathscr{E}$

Si A et Bsont distinctes alors ils forment un vecteur noté : : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

Si A et B sont confondues alors : $\vec{0}=\overrightarrow{AA}$(vecteur nul)

2)Remarques :

a)Si O un point dans l'espace $\mathscr{E}$ alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace il existe un point unique M dans l'espace $\mathscr{E}$ tel que : $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$

b) L'ensemble des vecteurs de l'espace se note V_3

c)Un vecteur non nul $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

Sa <u>direction</u> : c'est la direction de la droite (AB)

Son <u>sens</u> : de A a B

Sa <u>norme</u> : $\|\vec{u}\|=\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

d)Deux vecteurs sont <u>égaux</u> s'ils ont la même direction, le même sens, la même norme.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$ ssi ABNM est un parallélogramme

e) Deux vecteurs peuvent avoir la même direction de tels vecteurs sont <u>colinéaires</u>

II) LES OPERATIONS DANS V_3 .

1) L'addition.

Définition : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de V_3 ;

Soient les points O : A ; B tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OC}$

la somme des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OD}$ tel que : OBDC est un parallélogramme

$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$

Propriété :L'addition dans V_3 a les propriétés suivantes

$\forall\vec{u}\in V_3$ et $\forall\vec{v}\in V_3$ $\forall\vec{w}\in V_3$

1) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ 2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{v}+(\vec{u}+\vec{w})$

3) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ 4) Tout vecteur $\vec{u}$ de V_3 admet un opposé noté $-\vec{u}$: $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

donc : (V_3 , +) est un groupe commutatif.

Et et on a donc : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$

2) Produit d'un vecteur par un réel.

Définition : $\forall\vec{u}\in V_3$ et $\forall\vec{v}\in V_3$ et $k\in\mathbb{R}^*$

Si $\vec{u}$ est non nul on pose : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

sur la droite (AB) il existe un seul point C tel que $\overrightarrow{AC}=k\vec{u}$

Le vecteur $\vec{v}=k\overrightarrow{AB}=k\vec{u}$ s'appelle le produit du réel k et du vecteur $\vec{u}$

on pose pour tout k dans $\mathbb{R}$: $k\vec{0}=\vec{0}$ et $0\vec{u}=\vec{0}$

on a : $k\vec{u}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$ ou $k=0$

Propriété :$\forall\vec{u}\in V_3$ et $\forall\vec{v}\in V_3$ et $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\forall\beta\in\mathbb{R}$

1) $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ 2) $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

3) $1\vec{u}=\vec{u}$ 4) $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$

on dit que : (V_3 ,+,.) **est un espace vectoriel réel.**

Remarque :

$\forall\vec{u}\in V_3$ et $\forall\vec{v}\in V_3$ et $\forall\alpha\in\mathbb{R}$; $\forall\beta\in\mathbb{R}$

1) $\alpha(\vec{u}-\vec{v})=\alpha\vec{u}-\alpha\vec{v}$ 2) $(\alpha-\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}-\beta\vec{u}$

3) $\alpha(-\beta\vec{u})=(-\alpha)(\beta\vec{u})=-\alpha\beta\vec{u}$

III) VECTEURS COLINEAIRES.

1) Vecteur colinéaires

Définition : On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que : $\vec{v}=k.\vec{u}$

Propriété : Si on a : $a\vec{u}+b\vec{v}=\vec{0}$ avec $a\neq0$ ou $b\neq0$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

2) Droite vectorielle

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, l'ensemble des vecteurs colinéaires avec le vecteur $\vec{u}$ s'appelle : la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\vec{u}$ et se note $\Delta_{\vec{u}}$

$\Delta_{\vec{u}}=\{\vec{v}\in V_3 / \exists k\in\mathbb{R} / \vec{v}=k\vec{u}\}$

$\Delta_{\vec{u}}=\Delta_{\vec{v}}\Leftrightarrow\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\Delta_{\vec{u}}\cap\Delta_{\vec{v}}=\{\vec{0}\}$

3) Détermination vectorielle d'une droite

Définition : Soient $\vec{u}$ un vecteur non nulle et A un point de l'espace affine $\mathscr{E}$. L'ensemble des points M dans l'espace $\mathscr{E}$ qui vérifient $\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$ où k est un réel s'appelle la droite qui passe par $\boldsymbol{A}$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ **.** On la note par $D(A;\vec{u})$: $D(A;\vec{u})=\{M\in\varepsilon / \exists k\in\mathbb{R} / \overrightarrow{AM}=k\vec{u}\}$

Remarque :

- Le couple $(A, \vec{u})$ détermine un repère sur la droite $D\left(A;\vec{u}\right)$
- Tout vecteur non nul et colinéaire avec $\vec{u}$ est aussi vecteur Directeur de la droite $D\left(A;\vec{u}\right)$

IV) VECTEURS COPLANAIRES.

1) vecteurs coplanaires.

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs et A un point l'espace

on pose $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{AD}=\vec{w}$

On dit que : les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi les points A, B ; C et D sont coplanaires

Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs dans l'espaces vectoriel

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'ils existent deux réels x et y tels que $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

Remarque : si $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires alors les vecteurssont coplanaires $\vec{w}$ et $\vec{v}$ et $\vec{u}$

2) Plan vectoriel

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires ; l'ensemble des vecteurs $\vec{w}$ dans V_3 qui s'écrivent de la forme : $\vec{w}=x\vec{u}+y\vec{v}$

où x et y sont des réels s'appelle le plan vectoriel engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$

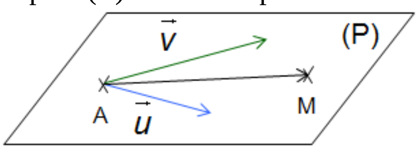
3) Détermination vectoriel d'un plan.

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace $\mathscr{E}$

l'ensemble des point M dans l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}$ est le plan qui passe par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, on le note par : $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

$$P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)=\left\{M\in\varepsilon / \exists x\in\mathbb{R}:\exists y\in\mathbb{R} / \overrightarrow{AM}=x\vec{u}+y\vec{v}\right\}$$

Le triplet $R\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ s'appelle un repère du plan (P) et le couple (x, y) s'appelle les coordonnées du point M dans le plan (P) muni du repère R



V) PARALLELISME DANS L'ESPACE

1) Parallélisme de deux droites

Définition : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs et et A et B deux points de l'espace

1) $D\left(A;\vec{u}\right) \parallel D\left(B;\vec{v}\right) \Leftrightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ sont colinéaires

2) A et B et C et D des points tels que : $A\neq B$ et $C\neq D$: $(AB)\parallel(CD) \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R};\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$

2) Parallélisme d'une droite et d'un plan.

Propriété : La droite $D\left(A;\vec{u}\right)$ et le plan $P\left(B;\vec{v};\vec{w}\right)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

$$D\left(A;\vec{u}\right)\parallel P\left(B;\vec{v};\vec{w}\right) \Leftrightarrow \exists x\in\mathbb{R}:\exists y\in\mathbb{R} / \vec{u}=x\vec{v}+y\vec{w}$$

3) Parallélisme de deux plans

Propriété : Deux plans $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ et $Q\left(B;\vec{u'};\vec{v'}\right)$ sont parallèles si et seulement si

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u'}$ sont coplanaires et $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont coplanaires aussi

Remarque : Une seule condition n'est pas suffisante

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien