FONCTIONS LOGARITHMES: Exercices avec solutions

⑦ Simplifier le plus possible :

a. $\ln 12 - \ln 8 + \ln 6$ $\qquad \ln 12 - \ln 8 + \ln 6 = \ln \frac{12 \times 6}{8} = \ln 9 = \ln 3^2 = \boxed{2\ln 3}$

b. $\ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n$ $\qquad \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n = \ln(1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n) = \boxed{\ln(n!)}$

c. $\ln 25 - \ln 10 - \ln 15$ $\qquad \ln 25 - \ln 10 - \ln 15 = \ln \frac{25}{10 \times 15} = \ln \frac{1}{6} = \boxed{-\ln 6}$

---

⑧ Exprimer en fonction de ln 2 les nombres :

a. $\ln 64$ $\qquad \ln 64 = \ln\left(2^6\right) = \boxed{6\ln 2}$

b. $\ln \frac{1}{16}$ $\qquad \ln \frac{1}{16} = -\ln 16 = -\ln\left(2^4\right) = \boxed{-4\ln 2}$

c. $\ln\sqrt{2} - \ln 32$ $\qquad \ln\sqrt{2} - \ln 32 = \frac{1}{2}\ln 2 - \ln\left(2^5\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - 5\ln 2 = \boxed{-\frac{9}{2}\ln 2}$

---

⑨ Donner une valeur approchée de chacun des nombres suivants, sachant que :
ln 2 ≈ 0,69 ln 3 ≈ 1,10 ln 5 ≈ 1,61 ln 7 ≈ 1,95

a. $\ln 24$

$$\ln 24 = \ln\left(2^3 \times 3\right) = 3\ln 2 + \ln 3$$
$$\ln 24 \approx 3 \times 0{,}69 + 1{,}10$$
$$\boxed{\ln 24 \approx 3{,}17}$$

b. $\ln \frac{5}{18}$

$$\ln \frac{5}{18} = \ln 5 - \ln 18 = \ln 5 - \ln\left(2 \times 3^2\right) = \ln 5 - \ln 2 - 2\ln 3$$
$$\ln \frac{5}{18} \approx 1{,}61 - 0{,}69 - 2 \times 1{,}10$$
$$\boxed{\ln \frac{5}{18} \approx -1{,}28}$$

c. $\ln \frac{9}{14}$

$$\ln \frac{9}{14} = \ln 9 - \ln 14 = \ln\left(3^2\right) - \ln\left(2 \times 7\right) = 2\ln 3 - \ln 2 - \ln 7$$
$$\ln \frac{9}{14} \approx 2 \times 1{,}10 - 0{,}69 - 1{,}95$$
$$\boxed{\ln \frac{9}{14} \approx -0{,}44}$$

---

⑩ Déterminer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto (5\ln x - 3)^2$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur]0 ; +∞[donc la fonction $x \mapsto 5\ln x - 3$ est dérivable sur]0 ; +∞[(produit et différence de fonctions dérivables sur]0 ; +∞[ ).
Inutile de chercher dans quel ensemble elle prend ses valeurs car la fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur ℝ.
f est donc dérivable sur]0 ; +∞[comme composée de fonction dérivables.

$\forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x) = 2 \times (5\ln x - 3) \times \frac{5}{x}$ $\qquad$ formule : $\left(u^n\right)' = nu^{n-1}u'$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x) = \boxed{\frac{10}{x}(5\ln x - 3)}$

b. $g : x \mapsto \dfrac{1-2\ln x}{3+\ln x}$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto 1-2\ln x$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ (produit et différence de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$).

De même, la fonction $x \mapsto 3+\ln x$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ (somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$) et ne s'annule qu'en e^{-3} ($\ln x+3=0 \Leftrightarrow \ln x=-3 \Leftrightarrow x=e^{-3}$).

g est donc dérivable sur $]0\,;+\infty[-\{e^{-3}\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet ensemble.

$$\forall x\in \left]0;+\infty\right[-\left\{e^{-3}\right\} \quad g'(x)=\frac{-\frac{2}{x}\times(3+\ln x)-(1-2\ln x)\times\frac{1}{x}}{(3+\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}\left[-2(3+\ln x)-(1-2\ln x)\right]}{(3+\ln x)^2}$$

$$\forall x\in \left]0;+\infty\right[-\left\{e^{-3}\right\} \quad g'(x)=\frac{\frac{1}{x}\left[-6-2\ln x-1+2\ln x\right]}{(3+\ln x)^2}=\boxed{\frac{-7}{x(3+\ln x)^2}}$$

c. $h : x \mapsto \ln\left(2x-\sqrt{x}\right)$

Recherchez tout d'abord l'ensemble de définition ! $h(x)$ existe si et seulement si :

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ 2x-\sqrt{x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0 \\ \sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0 \\ \sqrt{x}>0 \\ 2\sqrt{x}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \sqrt{x}>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{1}{4}$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc sur $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$. La fonction $x \mapsto 2x-\sqrt{x}$ est dérivable sur $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ (différence de fonctions dérivables sur $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$) et prend ses valeurs dans $]0\,;+\infty[$ (voir recherche de l'ensemble de définition) or la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ donc h est dérivable sur $\left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x\in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[\quad h'(x)=\frac{2-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2x-\sqrt{x}}=\frac{\frac{4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}}{2x-\sqrt{x}}=\frac{4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\left(2x-\sqrt{x}\right)}$$

ou, si vous préférez, $\forall x\in \left]\frac{1}{4};+\infty\right[\quad h'(x)=\dfrac{4\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-1\right)}=\boxed{\dfrac{4\sqrt{x}-1}{2x\left(2\sqrt{x}-1\right)}}$

---

⑪ Déterminer les limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x-1}{\ln^2 x+3}$

$$\forall x\in \left]0;+\infty\right[-\{1\} \quad \frac{2\ln x-1}{\ln^2 x+3}=\frac{\ln x\left(2-\frac{1}{\ln x}\right)}{\ln^2 x\left(1+\frac{3}{\ln^2 x}\right)}=\frac{1}{\ln x}\times\frac{2-\frac{1}{\ln x}}{1+\frac{3}{\ln^2 x}}$$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$ théorèmes d'opérations … $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x-1}{\ln^2 x+3}=0}$

b. $\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x-1}{\ln^2 x+3}$

On utilise la même écriture $\forall x\in\left]0;+\infty\right[-\{1\}$ $\frac{2\ln x-1}{\ln^2 x+3}=\frac{1}{\ln x}\times\frac{2-\frac{1}{\ln x}}{1+\frac{3}{\ln^2 x}}$ et comme

$\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln x}=0$ théorèmes d'opérations … $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{2\ln x-1}{\ln^2 x+3}=0}$

c. $\lim_{x\to 0}\left(x^2-\pi+2\ln x\right)$

$\lim_{x\to 0}\left(x^2-\pi\right)=-\pi$ et $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0}\left(x^2-\pi+2\ln x\right)=-\infty}$

---

⑰ Déterminer les limites suivantes :

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$

$\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$ existe si et seulement si $\begin{cases}x\neq 0\\1+x^2>0\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $x\neq 0$. Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$.

$\lim_{x\to 0}x^2=0$ et $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$ donc $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}=1$ (théorème de composition)

or $\forall x\in\mathbb{R}^*$ $\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\times x$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}=0}$ (théorème de multiplication)

b. $\lim_{x\to -3}\left[(x+3)\ln(x+3)-x\right]$

$\lim_{x\to -3}(x+3)=0$ et $\lim_{X\to 0}X\ln X=0$ donc $\lim_{x\to -3}(x+3)\ln(x+3)=0$ (théorème de composition)

$\boxed{\lim_{x\to -3}\left[(x+3)\ln(x+3)-x\right]=3}$ (théorème d'addition)

c. $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}$

On a déjà déterminé l'ensemble de définition $\mathbb{R}^*$.

$\forall x\in\mathbb{R}^*$ $\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=\frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{x}=\frac{\ln x^2+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

$\forall x\in\left]0;+\infty\right[$ $\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=\frac{2\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

Par théorème (croissances comparées) $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^2}=0$ donc $\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$ et comme $\lim_{X\to 1}\ln X=0$, $\lim_{x\to +\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=0$

théorème de division : $\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}=0$ et théorème d'addition : $\boxed{\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)}{x}=0}$

d. $\lim_{x\to 0} x\ln\left(x^2\right)$

$x\ln\left(x^2\right)$ existe si et seulement si $x^2>0 \Leftrightarrow x\neq 0$. Ensemble de définition : $\mathbb{R}^*$.

$\forall x\in \mathbb{R}^* \quad x\ln\left(x^2\right)=2x\ln|x|$

$\forall x\in \left]0;+\infty\right[\quad x\ln\left(x^2\right)=2x\ln x$ or $\lim_{x\to 0} x\ln x=0$ donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln\left(x^2\right)=0$

$\forall x\in \left]-\infty;0\right[\quad x\ln\left(x^2\right)=2x\ln(-x)=-2(-x)\ln(-x)$

$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-x)=0^+$ or $\lim_{X\to 0} X\ln X=0$ donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(-x)\ln(-x)=0$ donc $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x\ln\left(x^2\right)=0$

Bilan : $\boxed{\lim_{x\to 0} x\ln\left(x^2\right)=0.}$

e. $\lim_{x\to-\infty} \ln\frac{x-1}{x+1}$

$\ln\frac{x-1}{x+1}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x+1\neq 0 \\ \frac{x-1}{x+1}>0 \end{cases}$. Ensemble de définition : $]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[$.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$ et $\lim_{X\to 1}\ln X=0$ donc $\boxed{\lim_{x\to-\infty}\ln\frac{x-1}{x+1}=0}$ (théorème de composition)

f. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)}$

$\frac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)}$ existe si et seulement si $\begin{cases} x-2>0 \\ x+3>0 \\ \ln(x+3)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>-3 \\ x+3\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>-3 \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$

Ensemble de définition : $]2\,;+\infty[$.

$$\forall x\in \left]2;+\infty\right[\quad \frac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)}=\frac{\ln\left[x\left(1-\frac{2}{x}\right)\right]}{\ln\left[x\left(1+\frac{3}{x}\right)\right]}=\frac{\ln x+\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\ln x+\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}=\frac{\ln x\left[1+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\ln x}\right]}{\ln x\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\ln x}\right]}=\frac{1+\frac{\ln\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\ln x}}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\ln x}}$$

Appliquez les théorèmes d'opérations … $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-2)}{\ln(x+3)}=1}$

---

⑱ Résoudre les équations suivantes :

a. $\ln(x+3)+\ln(2-x)=\ln(11-7x)$

Ensemble de définition : $\left]-3;\frac{11}{7}\right[$ car $\begin{cases} x+3>0 \\ 11-7x>0 \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3 \\ \frac{11}{7}>x \\ 2>x \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<\frac{11}{7}$

FONCTIONS LOGARITHMES: Exercices avec solutions

$$\ln(x+3)+\ln(2-x)=\ln(11-7x) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left[(x+3)(2-x)\right]=\ln(11-7x) \\ -3<x<\dfrac{11}{7} \end{cases}$$

$$\ln(x+3)+\ln(2-x)=\ln(11-7x) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(2-x)=11-7x \\ -3<x<\dfrac{11}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=x^2-6x+5 \\ -3<x<\dfrac{11}{7} \end{cases}$$

$$\ln(x+3)+\ln(2-x)=\ln(11-7x) \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ou } x=5 \\ -3<x<\dfrac{11}{7} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{1\}$.

b. $\ln(x-\mathrm{e})+\ln x=2+\ln 2$

Ensemble de définition : $\left]\mathrm{e};+\infty\right[$ car $\begin{cases} x-\mathrm{e}>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\mathrm{e}$

$$\ln(x-\mathrm{e})+\ln x=2+\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left[(x-\mathrm{e})x\right]=\ln \mathrm{e}^2+\ln 2 \\ x>\mathrm{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left[(x-\mathrm{e})x\right]=\ln 2\mathrm{e}^2 \\ x>\mathrm{e} \end{cases}$$

$$\ln(x-\mathrm{e})+\ln x=2+\ln 2 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-\mathrm{e})x=2\mathrm{e}^2 \\ x>\mathrm{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\mathrm{e}x-2\mathrm{e}^2=0 \\ x>\mathrm{e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\mathrm{e} \text{ ou } x=-\mathrm{e} \\ x>\mathrm{e} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{2\mathrm{e}\}$.

c. $\ln(x-2)-\ln x=\ln(2x-3)$

Ensemble de définition : $\left]2;+\infty\right[$ car $\begin{cases} x-2>0 \\ 2x-3>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x>\dfrac{3}{2} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$

$$\ln(x-2)-\ln x=\ln(2x-3) \Leftrightarrow \ln(x-2)=\ln x+\ln(2x-3)$$

$$\ln(x-2)-\ln x=\ln(2x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x-2)=\ln\left[x(2x-3)\right] \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=x(2x-3) \\ x>2 \end{cases}$$

$$\ln(x-2)-\ln x=\ln(2x-3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0=2x^2-4x+2 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0=2(x-1)^2 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x>2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{\ \}$.

d. $\ln(x-1)-\ln(x+1)=-\ln(2x-4)$

Ensemble de définition : $\left]2;+\infty\right[$ car $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \\ 2x-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>-1 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$

$$\ln(x-1)-\ln(x+1)=-\ln(2x-4) \Leftrightarrow \ln(x-1)+\ln(2x-4)=\ln(x+1)$$

$$\ln(x-1)-\ln(x+1)=-\ln(2x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left[(x-1)(2x-4)\right]=\ln(x+1) \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(2x-4)=x+1 \\ x>2 \end{cases}$$

$$\ln(x-1)-\ln(x+1)=-\ln(2x-4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-7x+3=0 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ou } x=\dfrac{1}{2} \\ x>2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est $\{3\}$.

FONCTIONS LOGARITHMES: Exercices avec solutions

⑲ Résoudre les inéquations suivantes :

a. $\ln x-\ln(x+1)\geqslant \ln(x+3)-\ln(x-4)$

Ensemble de définition : $]4;+\infty[$ car $\begin{cases}x>0\\x+1>0\\x+3>0\\x-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x>-1\\x>-3\\x>4\end{cases}\Leftrightarrow x>4$

$\ln x-\ln(x+1)\geqslant \ln(x+3)-\ln(x-4)\Leftrightarrow \ln x+\ln(x-4)\geqslant \ln(x+3)+\ln(x+1)$

$\ln x-\ln(x+1)\geqslant \ln(x+3)-\ln(x-4)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln[x(x-4)]\geqslant \ln[(x+3)(x+1)]\\x>4\end{cases}$

$\ln x-\ln(x+1)\geqslant \ln(x+3)-\ln(x-4)\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-4)\geqslant(x+3)(x+1)\\x>4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-8x\geqslant 3\\x>4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant-\frac{3}{8}\\x>4\end{cases}$

L'ensemble des solutions est { }.

b. $\ln(x+1)-\ln(2-x)\leqslant \ln(3-x)$

Ensemble de définition : $]-1;2[$ car $\begin{cases}x+1>0\\2-x>0\\3-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\2>x\\3>x\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<2$

$\ln(x+1)-\ln(2-x)\leqslant \ln(3-x)\Leftrightarrow \ln(x+1)\leqslant \ln(3-x)+\ln(2-x)$

$\ln(x+1)-\ln(2-x)\leqslant \ln(3-x)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x+1)\leqslant \ln[(3-x)(2-x)]\\-1<x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1\leqslant(3-x)(2-x)\\-1<x<2\end{cases}$

$\ln(x+1)-\ln(2-x)\leqslant \ln(3-x)\Leftrightarrow\begin{cases}0\leqslant x^2-6x+5\\-1<x<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 1 \text{ ou } x\geqslant 5\\-1<x<2\end{cases}$

L'ensemble des solutions est]–1 ; 1].

c. $\ln(2x-7)\leqslant \ln(x+3)$

Ensemble de définition : $\left]\frac{7}{2};+\infty\right[$ car $\begin{cases}2x-7>0\\x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{7}{2}\\x>-3\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{7}{2}$

$\ln(2x-7)\leqslant \ln(x+3)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-7\leqslant x+3\\x>\frac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leqslant 10\\x>\frac{7}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \frac{7}{2}<x\leqslant 10$

L'ensemble des solutions est $\left]\frac{7}{2};10\right]$.

---

⑳ Etudier la parité des fonctions suivantes :

a. $f:x\mapsto x^2\ln|x|$

$f(x)$ existe si et seulement si $|x|>0\Leftrightarrow x\neq 0$. L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^*$.

Il est bien symétrique par rapport à 0.

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(-x)=(-x)^2\ln|-x|=x^2\ln|x|=f(x)$

La fonction f est paire.

b. $g : x \mapsto \ln\dfrac{2+x}{2-x}$

$g(x)$ existe si et seulement si $\begin{cases} 2-x \neq 0 \\ \dfrac{2+x}{2-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ -2 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 2$. L'ensemble de définition de g est]–2 ; 2[. Il est bien symétrique par rapport à 0.

$$\forall x \in]-2;2[\quad g(-x) = \ln\frac{2+(-x)}{2-(-x)} = \ln\frac{2-x}{2+x} = \ln\frac{1}{\frac{2+x}{2-x}} = -\ln\frac{2+x}{2-x} = -g(x)$$

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est impaire.}}$

c. $h : x \mapsto x\ln(|x|-1)$

$h(x)$ existe si et seulement si $|x|-1>0 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow (x<-1 \text{ ou } x>1)$. L'ensemble de définition de h est]–∞ ; -1[U]–∞ ; -1[. Il est bien symétrique par rapport à 0.

$$\forall x \in]-2;2[\quad g(-x) = \ln\frac{2+(-x)}{2-(-x)} = \ln\frac{2-x}{2+x} = \ln\frac{1}{\frac{2+x}{2-x}} = -\ln\frac{2+x}{2-x} = -g(x)$$

$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est impaire.}}$

㉒ **1.** Si $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le produit $P_n = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Constater que P_n s'exprime très simplement en fonction de n.

$$P_n = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\ldots\times\frac{n+1}{n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$$

En déduire la valeur de : $P'_n = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$$P'_n = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left[2\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\ldots\times\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$P'_n = \ln P_n = \ln(n+1)$$

Les suites (P_n) et (P'_n) tendent-elles vers une limite ? Si oui, laquelle ?

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$$

de plus, $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P'_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$ (théorème de composition)

2. Soit le produit $R_n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}\times\ldots\times\dfrac{1}{1-\frac{1}{n}}$.

Constater que R_n s'exprime très simplement en fonction de n.

$$R_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\times\ldots\times\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{\frac{2}{3}}\times\ldots\times\frac{1}{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\times\ldots\times\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

$$R_n = \frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\ldots\times\frac{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

En déduire la valeur de : $R'_n = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$.

$$R'_n = \ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=\ln\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$R'_n = \ln\left(\frac{1}{R_n}\right)=\ln\frac{1}{n}=-\ln n$$

Les suites (R_n) et (R'_n) tendent-elles vers une limite ? Si oui, laquelle ?

$\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} R'_n=-\infty$.

3. Calculer : $Q'_n = \ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

$$Q'_n = \ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$Q'_n = \ln\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]+\ln\left[\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+\ldots+\ln\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$Q'_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$Q'_n = \ln 2+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)-\ln 2$$

$$Q'_n = P'_n+R'_n-\ln 2=\ln(n+1)-\ln n-\ln 2=\ln\frac{n+1}{2n}$$

La suite (Q'_n) tend-elle vers une limite ? Si oui, laquelle ?

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$ (théorème sur fonctions rationnelles) et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\ln x=\ln\frac{1}{2}$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} Q'_n=\ln\frac{1}{2}=-\ln 2$ (théorème de composition)

En déduire la limite, si elle existe, de : $Q_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

Puisque $Q'_n=\ln Q_n$ $Q_n=e^{Q'_n}$ d'où (encore une composition) $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n=e^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

㉓ Etudier les variations de la fonction f définie par : $f(x)=\ln\frac{2x+1}{x+1}$ et la représenter graphiquement.

$f(x)$ existe si et seulement si $\frac{2x+1}{x+1}>0$, ce qui équivaut à $x\in\ ]-\infty;-1[\cup\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

La fonction $x\mapsto\frac{2x+1}{x+1}$ est une fonction rationnelle. Elle est donc dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R}-\{-1\}$. Elle est donc dérivable sur D_f et prend alors ses valeurs dans]0 ; +∞[d'après l'étude de signe faite plus haut. Or la fonction ln est dérivable sur]0 ; +∞[.

f est donc dérivable sur D_f comme composée de fonctions dérivables.

$$\forall x\in D_f \quad f'(x)=\frac{\frac{2\times(x+1)-(2x+1)\times1}{(x+1)^2}}{\frac{2x+1}{x+1}}=\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{2x+1}{x+1}}=\frac{1}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{(x+1)(2x+1)}$$

FONCTIONS LOGARITHMES: Exercices avec solutions

Le signe d'un produit étant le même que celui d'un quotient, $f'(x)$ est strictement positive sur D_f

donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;-1\right[$ et sur $\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Limite en −∞ : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{x}=2$ et $\lim\limits_{X\to 2}\ln X=\ln 2$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\ln 2$ (composition)

Limite finie d'où asymptote horizontale d'équation $y=\ln 2$. Mêmes conclusions en $+\infty$.

Limite en −1 : $\lim\limits_{x\to-1}(2x+1)=-1$ et $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$ et si $x<-1$ alors $x+1<0$ donc

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{2x+1}{x+1}=+\infty$. De plus, $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=+\infty$ (composition).

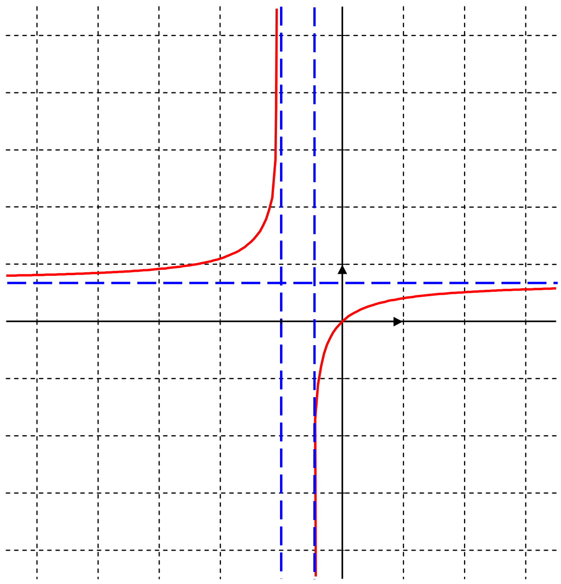
Limite infinie donc asymptote verticale d'équation $x=-1$.

Limite en $-\frac{1}{2}$: $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}(2x+1)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}(x+1)=\frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{x+1}=0$. De plus,

$\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}f(x)=-\infty$ (composition).

Limite infinie donc asymptote verticale d'équation $x=-\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	-1		$-1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	‖		‖	+
$f(x)$	$\ln 2$ ↗	$+\infty$ ‖		‖ $-\infty$	↗ $\ln 2$



Calculer $\dfrac{f\left(-\frac{3}{4}+h\right)+f\left(-\frac{3}{4}-h\right)}{2}$. Que peut-on en conclure pour la représentation graphique de f ?

$$f\left(-\frac{3}{4}+h\right)=\ln\frac{2\left(-\frac{3}{4}+h\right)+1}{\left(-\frac{3}{4}+h\right)+1}=\ln\frac{-\frac{3}{2}+2h+1}{-\frac{3}{4}+h+1}$$

$$f\left(-\frac{3}{4}+h\right)=\ln\frac{-\frac{1}{2}+2h}{\frac{1}{4}+h}=\ln\frac{-2+8h}{1+4h}$$

On obtient $f\left(-\frac{3}{4}-h\right)$ en remplaçant h par $-h$: $f\left(-\frac{3}{4}+h\right)=\ln\frac{-2-8h}{1-4h}$

$$\frac{f\left(-\frac{3}{4}+h\right)+f\left(-\frac{3}{4}-h\right)}{2}=\frac{\ln\frac{-2+8h}{1+4h}+\ln\frac{-2-8h}{1-4h}}{2}=\frac{\ln\left(\frac{-2+8h}{1+4h}\times\frac{-2-8h}{1-4h}\right)}{2}$$

$$\frac{f\left(-\frac{3}{4}+h\right)+f\left(-\frac{3}{4}-h\right)}{2}=\frac{\ln\left(\frac{2(4h-1)}{4h+1}\times\frac{-2(4h+1)}{-(4h-1)}\right)}{2}=\frac{\ln 4}{2}=\frac{2\ln 2}{2}=\ln 2$$

Ce résultat est constant. La courbe admet donc un centre de symétrie de coordonnées $\left(-\frac{3}{4};\ln 2\right)$.

FONCTIONS LOGARITHMES: Exercices avec solutions

㉔ **Partie A - Étude préliminaire : mise en place d'une inégalité**

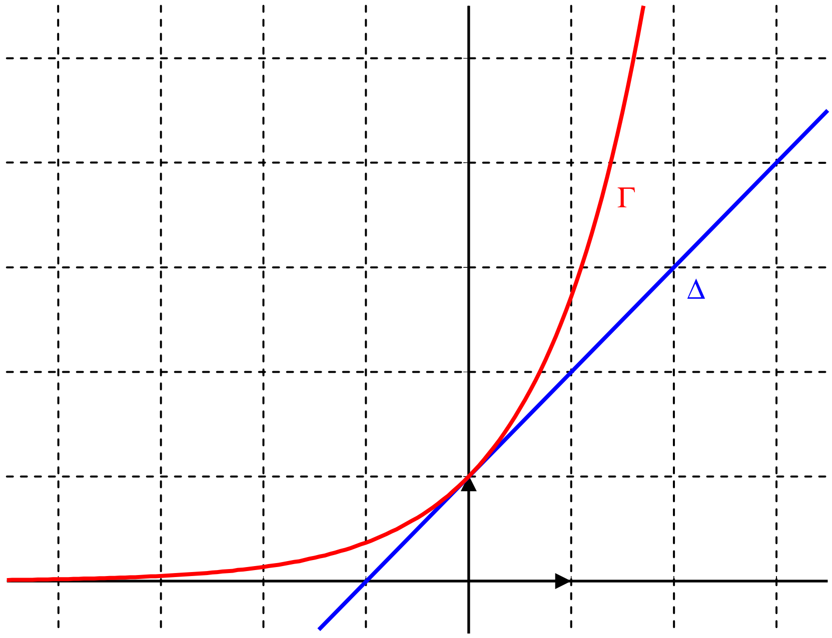
1. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On désigne par Δ la droite d'équation $y = x + 1$ et par Γ la courbe d'équation $y = e^x$.

a. Que représente la droite Δ pour la courbe Γ ?

La droite Δ est la tangente à Γ au point d'abscisse 0. En effet, celle-ci a pour équation :

$$y = \exp'(0)\times(x-0)+\exp(0) \Leftrightarrow y = e^0 x + e^0 \Leftrightarrow y = x+1.$$

b. Tracer dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ la droite Δ et donner l'allure de Γ.



2. ***a.*** Démontrer que pour tout réel t, $e^t \geqslant t + 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Considérons la fonction $\varphi : t \mapsto e^t - (t+1)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ (différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$). $\forall t\in\mathbb{R} \quad \varphi'(t) = e^t - 1$.

- Si $t < 0$, alors $e^t < 1$ donc $\varphi'(t) < 0$ et comme φ est dérivable sur $]-\infty ; 0]$, φ est donc strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
- Si $t > 0$, alors $e^t > 1$ donc $\varphi'(t) > 0$ et comme φ est dérivable sur $[0 ; +\infty[$, φ est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- En 0, la dérivée de φ s'annule en changeant de signe. φ admet un minimum absolu égal à $\varphi(0) = 0$, d'où $\forall t\in\mathbb{R} \quad \varphi(t) \geqslant 0$, c'est-à-dire $\forall t\in\mathbb{R} \quad e^t - (t+1) \geqslant 0$ d'où $\forall t\in\mathbb{R} \quad e^t \geqslant t+1$.

Cela veut dire que la courbe Γ est au-dessus de sa tangente Δ.

b. En déduire que pour tout réel t, $e^{-t} + t + 1 \geqslant 2$, et que pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{x} + \ln x + 1 \geqslant 2$.

Puisque l'inégalité $e^t \geqslant t+1$ est vraie pour tout réel t, on peut remplacer t par $-t$:

$\forall t\in\mathbb{R} \quad e^{-t} \geqslant -t+1$ d'où $e^{-t} + t \geqslant 1$. On ajoute 1 pour obtenir $\forall t\in\mathbb{R} \quad e^{-t} + t + 1 \geqslant 2$.

Tout nombre réel est le logarithme népérien d'un réel strictement positif. On peut donc remplacer t par $\ln x$: $\forall x\in]0;+\infty[\quad e^{-\ln x} + \ln x + 1 \geqslant 2$ d'où $\forall x\in]0;+\infty[\quad e^{\ln\frac{1}{x}} + \ln x + 1 \geqslant 2$ ce qui revient à $\forall x\in]0;+\infty[\quad \frac{1}{x} + \ln x + 1 \geqslant 2$.

FONCTIONS LOGARITHMES: Exercices avec solutions

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = (x + 1)\ln x$.

On appelle C la courbe représentative de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique: 2 cm).

1. ***a.*** Étudier le sens de variation de g en utilisant la partie **A.**

g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$.

$\forall x\in]0;+\infty[\quad g'(x)=1\times\ln x+(x+1)\times\frac{1}{x}=\ln x+1+\frac{1}{x}$

D'après le **A.2.*b.***, $\forall x\in]0;+\infty[\quad g'(x)\geqslant 2$. La dérivée de g est donc strictement positive sur $]0 ; +\infty[$ et par suite g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

b) Déterminer les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$.

Limite en 0 : $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=-\infty$ (théorème de multiplication)

Cette limite est infinie. C admet donc l'axe des ordonnées pour asymptote.

Limite en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$

2. ***a.*** Déterminer une équation de la tangente D à C au point d'abscisse 1.

Cette équation est : $y=g'(1)\times(x-1)+g(1) \Leftrightarrow y=2(x-1)+0 \Leftrightarrow y=2x-2$

b. On appelle h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = g(x) - 2x + 2$.
Étudier le sens de variation de h. (On pourra utiliser la question **A.2.*b.***).

Puisque g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $x \mapsto -2x + 2$ dérivable sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme), h est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$\forall x\in]0;+\infty[\quad h'(x)=g'(x)-2$ or on a montré que $\forall x\in]0;+\infty[\quad g'(x)\geqslant 2$ donc $\forall x\in]0;+\infty[\quad h'(x)\geqslant 0$ et la fonction h est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

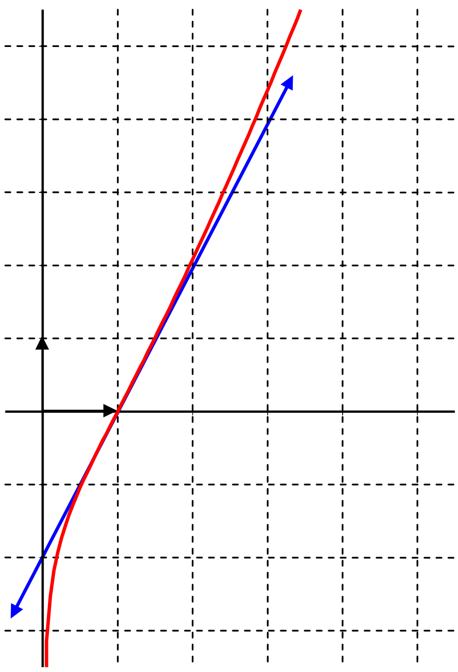
h s'annule en 1 (la droite D d'équation $y=2x-2$ est tangente à C au point d'abscisse 1) et est croissante sur $]0 ; +\infty[$. Par conséquent, h est négative sur $]0 ; 1]$ et positive sur $[1 ; +\infty[$.

c. Étudier la position de C par rapport à D.

La position de C par rapport à D s'étudie au moyen du signe de la différence $g(x) - (2x - 2)$, c'est-à-dire $h(x)$, signe étudié à la question précédente.

C est donc au-dessous de D sur $]0 ; 1]$ et au-dessus de D sur l'intervalle$[1 ; +\infty[$.

Remarquons qu'en 1, C traverse donc sa tangente. Il s'agit d'un **point d'inflexion**.



3. Tracer C et D dans le repère $(O ; \vec{u} , \vec{v})$.