PRODUIT SCALAIRE

I) Le produit scalaire de deux vecteurs :

1)Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Et soient A ; B et C trois points du plan tel que :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

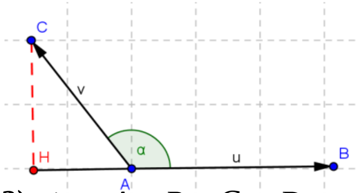
a)Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$

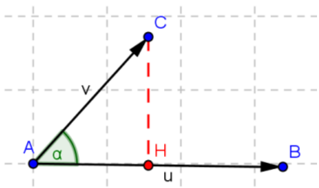
b)Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AH} \times \overline{AB}$ c a d

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AH \times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens

$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AH \times AB$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont un sens contraire





2)soient A ; B ; C et D quatre points du plan

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overline{A'B'} \times \overline{CD} = \overline{AB} \times \overline{C'D'}$ avec : A' ; B' les projections orthogonales respectifs de A ; B sur la droite (CD).

Et C' ; D' les projections orthogonales respectifs de C et D sur la droite (AB)

3) un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ c'est la distance AB.

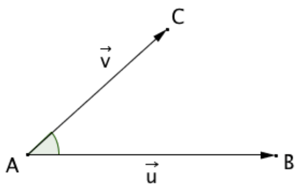
4) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

a) $\vec{u}.\vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul

b) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$,

dans le cas contraire.



$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

5)Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos BAC$

5)propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ 2) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$ 3) $\vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}$

Avec k un nombre réel.

4) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$ 5) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

6) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

II. Produit scalaire et norme

1)Soit un vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

2) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

3)Soit A, B et C trois points du plan.

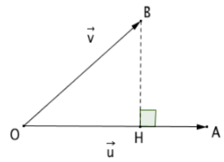
On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

4)Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

III. Projection orthogonale

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).

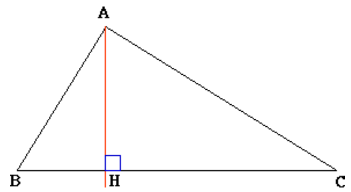


On a : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

IV). APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1)les relations métriques dans un triangle rectangle

Le triangle ABC ci-dessous est rectangle en A et [AH] la hauteur.



Théorème de Pythagore

si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (

$BA^2 = BH \times BC$ ET $CA^2 = CH \times BC$ ET

$AH^2 = HB \times HC$ ET $AB \times AC = AH \times BC$

2) Théorème d'Al Kashi

Dans un triangle ABC, on a avec les notations de la figure :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$

3) Théorème de la médiane

Soit deux points A et B et I le milieu du segment [AB].Pour tout point M, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

4) Surface d'un triangle et formule de sinus

Dans un triangle ABC on a :

1) $S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$ avec S Surface du triangle ABC

2)

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2 \times S}{abc}$

(formule de sinus)