

# Les polynômes

## 1) Définition d'un polynôme

a) L'expression :  $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$  est appelée polynôme de degré 3. On note  $\deg(V) = 3$ .

Les réels 1, 8, 15, 0 sont appelés coefficients du Polynôme  $V(x)$ .

$8x^2$  est un monôme de degré 2 et de coefficient 8.

$x^3$  est un monôme, de degré 3 et de coefficient 1.

$15x$  est un monôme, de degré 1 et de coefficient 15.

b) Un polynôme est une somme de monômes.

Un polynôme de la variable  $x$  sera noté souvent  $P(x)$ ,

$Q(x)$ , ... Le degré du polynôme  $P$ , noté  $\deg P$ , est celui de son monôme de plus haut degré.

c) **Remarque et exemples :**

•  $P(x) = 3x^4 + x^3 - 7x + \sqrt{3}$  Est un polynôme de degré 4 ordonné suivant les puissances décroissantes. Son terme constant (le terme sans la variable  $x$ ) est  $\sqrt{3}$

•  $R(x) = x^3 + 3x^2 - \frac{2}{x} - 1$  n'est pas un polynôme

•  $E(x) = \sqrt{x} + x^2 - 3$  n'est pas un polynôme

•  $F(x) = 2 = 2x^0$  Est un polynôme de degré 0 et

S'appelle un polynôme constant

• un monôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme :

$$M(x) = ax + b$$

• un polynôme de degré 2 s'appelle un trinôme

Donc un trinôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme :  $T(x) = ax^2 + bx + c$

Avec  $a \in \mathbb{R}^*$  et  $b \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$

d) Deux polynômes  $P$  et  $Q$  sont égaux et on écrit  $P = Q$  si

si  $P(x) = Q(x)$  Pour tout  $x$  réel

e) Deux polynômes  $P$  et  $Q$  sont égaux

si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

## 2) opérations sur les polynômes

a) **La somme de deux polynômes :**

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes

La somme de  $P$  et  $Q$  est un polynôme noté  $P + Q$

tel que :  $(P+Q)(x) = (P)(x) + (Q)(x)$

pour tous  $x \in \mathbb{R}$

et  $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P); \deg(Q))$

b) **Le produit d'un polynôme par un réel :**

Soient  $P$  un polynôme et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Le produit de  $P$  par un réel  $\alpha$  est un polynôme noté  $\alpha P$  et tel que :  $(\alpha P)(x) = \alpha \times (P)(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

et  $\deg(\alpha P) = \deg(P)$

c) **Le produit de deux polynômes :**

Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes non nuls

Le produit de  $P$  et  $Q$  est un polynôme noté  $PQ$

et tel que :  $(PQ)(x) = (P)(x) \times (Q)(x)$   $x \in \mathbb{R}$

et :  $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

## 3) La division euclidienne d'un polynôme par $x - a$ et factorisation

a) Soient  $P$  un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $a \in \mathbb{R}$ . Il existe un unique polynôme  $Q$  de degré  $n - 1$  et tq :  $P(x) = (x - a)Q(x) + P(a)$  Pour tous  $x \in \mathbb{R}$ . Cette égalité est la division euclidienne de  $P(x)$  par  $x - a$

$Q(x)$  est le quotient et  $P(a)$  le reste

b) Soient  $P$  un polynôme et soit  $a \in \mathbb{R}$ . On dit que  $a$  est racine du polynôme  $P$  ssi  $P(a) = 0$

c) Soient  $P$  un polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $a \in \mathbb{R}$ .  $a$  est racine du polynôme  $P$  ssi  $P(x)$  est divisible par  $x - a$ .

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

