

L'ordre dans : \mathbb{R} **I) L'ordre dans : \mathbb{R}**

Comparer deux nombres réels a et b , c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

1) soient a et b deux réels.

$a \leq b$ se lit « a inférieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \geq 0$

$b \geq a$ se lit « a supérieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \geq 0$

$a < b$ se lit « a strictement inférieur à b » ce qui équivaut à $b-a > 0$

$a > b$ se lit « a strictement supérieur à b » ce qui équivaut à $b-a < 0$

Ainsi, comparer a et b revient à étudier le signe de $a-b$.

2) L'ordre et les opérations dans \mathbb{R}

a) Soient a et b et c trois nombres réels

✓ Si $a \leq b$ alors $a+c \leq b+c$ et $a-c \leq b-c$

✓ Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a+c \leq b+d$

b) $ab \geq 0$ ssi $a \geq 0$ ou $b \geq 0$ ou $a \leq 0$ ou $b \leq 0$

(le produit de deux réels de même signe et toujours positifs)

c) si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$

si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$

d) si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$

si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

e) si $a \leq b \leq 0$ alors $a^2 \geq b^2$

f) si $ab > 0$ on a : si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

3) La valeur absolue

a) $x \in \mathbb{R}$ Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$

b) Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit A et B les points d'abscisses respectives a et b sur un axe normé (gradué)

La distance entre a et b c'est la distance AB et on la note

$AB = |a-b|$ et $|a-b| = |b-a|$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}^+$

$|x| \geq 0$; $|x^2| = |x|^2 = x^2$; $-|x| \leq x \leq |x|$; $|x| = |-x|$

$\sqrt{x^2} = |x|$; $|xy| = |x||y|$; $|x+y| \leq |x|+|y|$; $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

$|x| = a$ équivaut à dire que $x = a$ ou $x = -a$

$|x| = |y|$ équivaut à dire que $x = y$ ou $x = -y$

Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.

4) Intervalles dans l'ensemble des nombres réels

a) a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Le tableau ci-dessous résume les différents types d'intervalles.

L'intervalle noté ...	inégalité ...	Représentation de cet intervalle sur une droite graduée
$[a ; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a ; b[$	$a < x < b$	
$]a ; b]$	$a < x \leq b$	
$[a ; b[$	$a \leq x < b$	
$[a ; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a ; +\infty[$	$a < x$	
$]-\infty ; b]$	$x \leq b$	
$]-\infty ; b[$	$x < b$	

b) $[a ; b]$, $]a ; b[$, $]a ; b]$ et $[a ; b[$ sont des intervalles d'extrémités a et b ($a < b$). Le centre de l'intervalle est le nombre $\frac{b-a}{2}$, et sa longueur est $b-a$.

c) $-\infty$ (moins l'infini) et $+\infty$ (plus l'infini) ne sont pas des nombres, ce sont des symboles.

Du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert

L'ensemble des réels \mathbb{R} se note aussi $]-\infty ; +\infty[$.

$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ et $\mathbb{R}^- =]-\infty, 0]$ et $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ et

$\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$

d) Réunion et intersection d'intervalles

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant **à la fois** aux deux intervalles.

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un **ou** l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

e) Soient a, b et x trois nombres réels tq $a \leq b$.

On pose $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ ou $I = [a; b[$ ou $I =]a; b]$

(Intervalles **bornés** d'extrémités a et b .)

Le **réel** $\frac{a+b}{2}$ est le milieu de l'intervalle I

Le **réel** $b-a$ est l'amplitude de l'intervalle I

Le **réel** $\frac{b-a}{2}$ est le rayon de l'intervalle I

f) Les intervalles et la valeur absolue

$x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{++}$

$|x| \leq r$ ssi $-r \leq x \leq r$ ssi $x \in [-r; r]$

$|x| \geq r$ ssi $x \geq r$ ou $x \leq -r$

5) L'encadrement et la valeur approchée

5-1) Encadrement :

Réaliser un encadrement du réel x , c'est trouver deux nombres assez proches a et b tel que, $a < x < b$ ou $a \leq x \leq b$ ou $a < x \leq b$ ou $a \leq x < b$

Chacun de ces doubles égalités s'appelle un encadrement du réel x d'amplitude $b-a$

Plus cette amplitude est réduite et plus l'encadrement est précis.

a s'appelle une approximation du réel x par défaut à $b-a$ près (ou avec la précision $b-a$)

b s'appelle une approximation du réel x par excès à $b-a$ près (ou avec la précision $b-a$)

5-2) Encadrements et opérations

- Encadrements et additions

Considérons deux réels x et y tels que :

$a < x < b$ et $c < y < d$ alors on a $a+c < x+y < b+d$.

Remarque : Pour encadrer le résultat d'une différence $a-b$ on commencera par encadrer $-b$ avant...

- Encadrements et multiplications

Considérons deux nombres réels **positifs** x et y tels que :

$0 < a < x < b$ et $0 < c < y < d$.

Le produit xy est alors encadré par ac et bd .

On a $ac < xy < bd$.

Il suffit de multiplier les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de xy .

Remarque : Pour encadrer le résultat d'une division, on commencera par la remplacer par une multiplication (diviser c'est multiplier par l'inverse).

5-3) Valeur approchée d'un nombre.

a) Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r)

lorsque $|x-a| \leq r$.

b) Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou

approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r), par défaut, lorsque $a \leq x \leq a+r$. a est une valeur approchée de x à r près, par excès, lorsque :

$$a-r \leq x \leq a.$$

Exemples: 1) on a $1,38 < \sqrt{2} < 1,42$ donc

$$1,40 - 0,02 < \sqrt{2} < 1,40 + 0,02$$

$$-0,02 < \sqrt{2} - 1,40 < 0,02 \text{ donc } |\sqrt{2} - 1,40| < 0,02$$

donc $1,40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

2) on a $1,40 \leq \sqrt{2} < 1,40 + 0,02$ donc $1,40$ est une

valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

3) on a $1,42 - 0,02 < \sqrt{2} < 1,42$ donc $1,42$ est une

valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

5-4) Approximation décimale.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

Si $N \times 10^{-p} \leq x \leq (N+1) \times 10^{-p}$ alors :

$N \times 10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-p} près

$(N+1) \times 10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-p} près

Exemple :: on a $0,333333 < \frac{1}{3} < 0,333334$ donc

$$333333 \times 10^{-6} < \frac{1}{3} < (333333+1) \times 10^{-6}$$

333333×10^{-6} est une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-6} près

$(333333+1) \times 10^{-6}$ est une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-6} près

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

