FONCTIONS - *Généralités*

1) Définitions et Domaine de définitions

à°) Définition : Une fonction est une relation qui a un nombre x appartenant à un ensemble D associe un nombre y : On note : x $\overset{f}{\mapsto}$ y ou encore $f : x \mapsto y$

Ou encore $y = f(x)$

On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f

b°) Domaine de définitions : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D_f

2) Egalité de deux fonctions – Représentations graphique

a)Egalité de deux fonctions : Soient f et g deux fonctions, et D_f et D_g leurs domaines de définition respectifs. On dit que f et g sont égaux et on écrit f=g. si et seulement si : $D_f = D_g$ et pour tout :

$x \in D_f$ (ou $x \in D_g$) on a f(x)=g(x)

b) Représentations graphique

Soit f une fonction , et D_f son domaine de définition l'ensemble des points M $(x, f(x))$ forme la courbe représentative de la fonction f, souvent notée C_f .

$C_f = \{M(x, f(x)) / x \in D_f\}$

3) Fonctions paires et Fonctions impaires

a) Fonction paire : On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si :

- si Pour tout x de D_f si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$
- Pour tout réel x de D_f on a : $f(-x) = f(x)$

b) Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

- si Pour tout x de D_f si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$
- Pour tout réel x de D_f, on a : $f(-x) = -f(x)$

c) le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

4) Les variations d'une fonction numérique

1)Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ $(f(x_1) \leq f(x_2))$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire f que est constante sur I signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I
- On dit que f est constante sur I ssi il existe un réel k tq: $f(x) = k$ pour tout $x \in I$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

- On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \succ 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0\right)$
- On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \prec 0$ $\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0\right)$
- On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$

c) les variations et la parité :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'
- f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

5) Les extremums d'une fonction numérique

1)Définitions : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

➢ Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout que $x \in I : f(x) \le f(a)$

➢ Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $x \in I : f(x) \ge f(a)$

6) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2$

Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = ax^2$; $a \in \mathbb{R}^*$ et puisque f est une fonction paire alors f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

<u>Tableau de variations de f si</u> $a \succ 0$

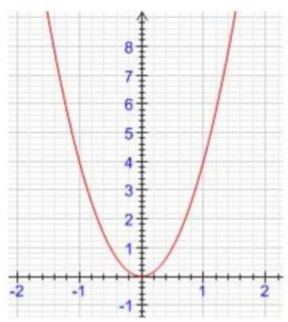
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

<u>Tableau de variations de f si</u> $a \prec 0$

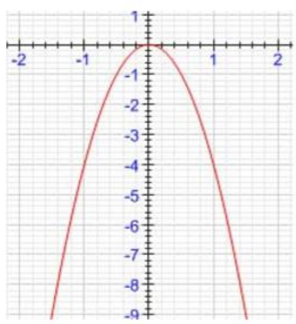
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↗	0	↘	$+\infty$

dans un Repére orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques sont son sommet qui est l'origine du repére et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées

Si a > 0



Si a < 0



7) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

1° On a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2° Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

Avec $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a}$

et s'appelle la forme canonique de $f(x)$

Dans le repére $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

3° <u>Les variations de f</u>

<u>Si</u> $a \succ 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↘	β	↗	

<u>Si</u> $a \prec 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↗	β	↘	

8) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

<u>a) Tableau de variations de f</u>

<u>si</u> $a \succ 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

<u>si</u> $a \prec 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

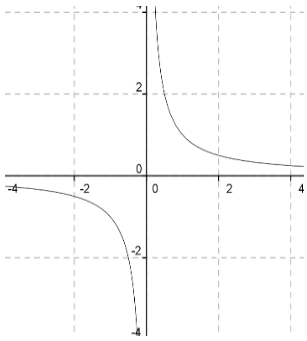
b) la courbe représentative de la fonction f s'appelle une hyperbole

c)Les éléments caractéristiques sont :

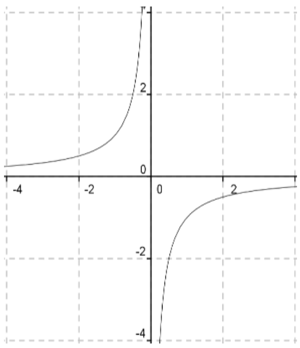
-son centre de symétrie est l'origine du repére

- ces deux asymptotes sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

si $a \succ 0$



si $a \prec 0$



9) Etude et représentation graphique des fonctions homographique : $x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$ $a \ne 0$ et $c \ne 0$ et $ad - bc \ne 0$

f est une fonction homographique

• Pour $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$ on a $f(x) = \beta + \frac{\gamma}{x-\alpha}$

dite forme réduite de $f(x)$

• Soit $W(\alpha;\beta)$ Donc dans le repére $(W;\vec{i};\vec{j})$ l'équation de (C_f) est $Y=\frac{\gamma}{X}$ avec $Y=y-\beta$ et $X=x-\alpha$ donc (C_f) est une hyperbole de centre W et d'asymptotes l'axe des abscisse et l'axe des ordonnées

• dans le repére $(O;\vec{i};\vec{j})$ (C_f) est l'hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=\alpha$ **et** $y=\beta$

1iér cas : si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \succ 0$

<u>Tableau de variations de f :</u>

x	$-\infty$ $-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	↗ ‖	↗

2iér cas : si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \prec 0$

<u>Tableau de variations de f :</u>

x	$-\infty$ $-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	↘ ‖	↘

10) Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle (s).

a) Position relative de deux courbes et intersection

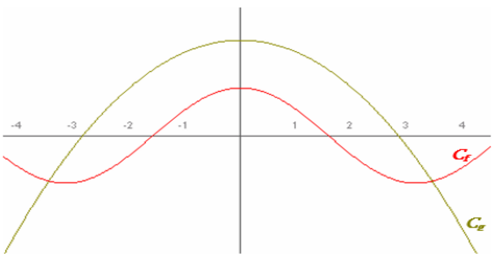
Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g .

On peut établir les relations suivantes :

$M(x;y)\in(C_f)$ ssi $y=f(x)$

$M(x;y)\in(C_g)$ ssi $y=g(x)$

Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g), on a $M\in(C_f)$ et $M\in(C_g)$ donc : soit $f(x)=g(x)$

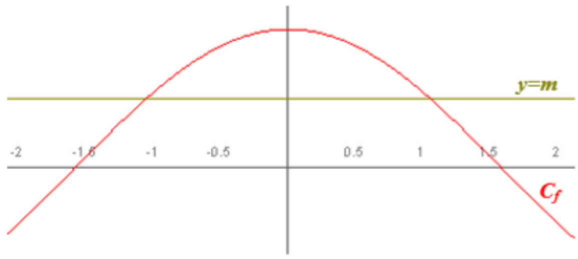


• les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points D'intersection de (C_f) et de (C_g)

• les solutions de l'inéquation $f(x)\geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g)

• les solutions de l'inéquation $f(x)\leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au- dessous de (C_g)

b)équation $f(x)=m$ et inéquation $f(x)\geq m$



• Les solutions de l'équation $f(x)=m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y=m$

• Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y=m$.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien