Systèmes : partie 2

1) On appelle système de deux équations du premier degré a deux inconnues toute système de la forme :

$(I)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où les coefficients *a*, *b*, *c* , *d* sont des réels donnés et le couple (x,y) est l'inconnue dans $\mathbb{R}^2$

Résoudre le système (I) c'est déterminer l'ensemble S des solutions c a d l'ensemble des couples (x,y) qui vérifient les deux équations: $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ simultanément

2) pour Résoudre un système (I) on utilise généralement quatre méthodes :

- Méthode de substitution
- Méthode de combinaison linéaire ou addition
- Méthode des déterminants
- Méthode graphique

a) Méthode de substitution :

Substituer, c'est remplacer par (Mettre à la place de).

Exemple : Dans le système $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$, on exprime *x* en fonction de *y* dans la première équation et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} x=3-2y \\ 2x+3y=4 \end{cases}$.

On remplace ensuite *x* par $3-2y$ dans la seconde équation, ce qui donne le système : $\begin{cases} x=3-2y \\ 2(3-2y)+3y=4 \end{cases}$ SSI

$\begin{cases} x=3-2y \\ -y+6=4 \end{cases}$, soit encore à $\begin{cases} x=3-2y \\ y=2 \end{cases}$

et on remplace *y* par 2 dans la première équation on trouve

$\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ donc :solution donc: $S=\{(-1,2)\}$

b) Méthode de combinaison linéaire ou méthode par addition : Cette méthode consiste à faire apparaître des coefficients opposés pour l'une des inconnues, en multipliant les équations par des facteurs bien choisis. En additionnant membre à membre les deux équations transformées, on obtient une équation à une seule inconnue que l'on peut résoudre.

Exemple : Dans le système $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$, on multiplie les termes de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 3 et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 9x-6y=12 \end{cases}$.

On additionne membre à membre les deux équations et on remplace la seconde équation du système par le résultat ; on obtient le système $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 13x=26 \end{cases}$ équivalent : $\begin{cases} 8+6y=14 \\ x=2 \end{cases}$,

soit $\begin{cases} 6y=6 \\ x=2 \end{cases}$ encore ou $\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$. On en déduit le couple solution : $S=\{(2,1)\}$.

Remarque : Un système peut n'avoir aucune solution ou encore une infinité de solutions.

Soit le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$. Si les coefficients de *x* et de *y* sont proportionnels, c'est-à-dire si $ab'=a'b$, ce système a une infinité de solutions ou pas de

– si de plus $ac'\neq a'c$, alors le système n'a pas de solution ;

– si $ac'=a'c$ (les coefficients des deux équations sont proportionnels), alors le système a une infinité de solutions.

c)Méthode des déterminants

Soit le système de deux équations à deux inconnues suivant

$(I)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ et $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$ son déterminant

- Si $\Delta\neq 0$ alors le système (I) admet un couple solution unique $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{cb'-c'b}{\Delta}$ $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}=\dfrac{ac'-a'c}{\Delta}$
- Si $\Delta=0$ alors :
  - ✓ Si $\Delta_x=0$ et $\Delta_y=0$ alors :les deux équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ sont équivalentes et dans ce cas Résoudre le système c'est Résoudre l'une des équations par exemple en choisi : $ax+by=c$ et alors on a : $S=\left\{\left(x;\dfrac{c-ax}{b}\right)/\,x\in\mathbb{R};b\neq 0\right\}$
  - ✓ Si $\Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0$ alors le système (I) n'admet aucun couple solutions et donc $S=\varnothing$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien