Exercices

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos(\pi x)$

1) Etudier la parité de la fonction f
2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x+2) = f(x)$
3) Déduire que la fonction f est périodique

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par

$f(x) = |x-1| + |x+1|$

1) Etudier la parité de la fonction f
2) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq 2$
3) Résoudre l'équation $f(x) = 2$ et déduire une valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + x$

1) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique
2) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) \geq -\frac{1}{4}$
3) Résoudre l'équation $f(x) = -\frac{1}{4}$ et déduire une valeur minimale de la fonction f sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

1) Déterminer D_f .
2) Etudier la parité de la fonction f .
3) Déterminer le signe de $(f(x))^2 - 4$ et déduire que la fonction f admet une valeur maximale sur D_f .

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

1) Déterminer D_f
2) Vérifier que $\forall x \in D_f$ $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$
3) Montrer que f est décroissante sur D_f
4) Montrer que $\forall x \in D_f$ $0 < f(x) \leq 1$
5) Calculer $f(-1)$ est déduire que 1 est une valeur maximale de la fonction f sur D_f

Exercice 6

Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{x-1}$

Et $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$

1) Déterminer $D_{f\circ g}$ et $D_{g\circ f}$
2) Donner l'expression de $(f\circ g)(x)$ pour tout $x \in D_{f\circ g}$

Exercice 7

Ecrire la fonction f sous forme de la composée de deux fonctions u et v dans les cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt{1-2x}$ 2) $f(x) = (2x+1)^2$

3) $f(x) = \dfrac{|x|-2}{|x|+3}$ 4) $f(x) = 2\sqrt{x^2+3}$

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions définies par :

$f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+1}$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) = 1 + \dfrac{x^2}{x^2+1}$
2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(x) = 2 - \dfrac{x^2}{x^2+1}$
   Et déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $1 \leq g(x) \leq 2$
3) La fonction f est-elle bornée sur $\mathbb{R}$?
4) Montrer que la fonction $g\circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$
5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $-2 \leq (g\circ f)(x) \leq 1$

Exercice 9

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x^2 + 2x$
   a. Déterminer la monotonie de la fonction f sur $\mathbb{R}^+$
   b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$; $f(x) \geq 0$
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = -1 + \sqrt{1+x}$
   a. Déterminer la monotonie de la fonction g sur $\mathbb{R}^+$
   b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+$; $g(x) \geq 0$.
3) Calculer $(f\circ g)(x)$ et $(g\circ f)(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^+$.
4) Représenter dans la même repère orthonormé (C_f) et (C_g)
   Et la droite d'équation $y = x$.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\cos x - x$

1) a) montrer pour tout x de $I = [0;\pi]$ $-\pi - 2 \leq f(x) \leq 2$
   b) étudier la monotonie de la fonction $x \mapsto \cos x$ sur l'intervalle I .
   c) déduire la monotonie de la fonction f .
2) On pose : $g(x) = f(4x)$
   Etudier la monotonie de la fonction g sur l'intervalle $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$
3) On pose : $h(x) = (2\cos x - x)^2$
   a. Déterminer une fonction u vérifiant $h = u \circ f$.
   b. Déterminer la monotonie de sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.