

1^{re} définition : définition normative

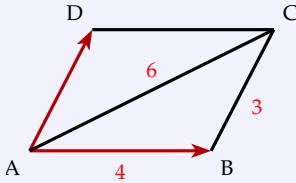
Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le nombre réel, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et lu « \vec{u} scalaire \vec{v} » tel que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Remarque : Cette définition mesure le **défaut d'orthogonalité** entre les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

Soit ABCD un parallélogramme.

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$$



$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{2} (\|\vec{AB} + \vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{AD}\|^2) = \frac{1}{2} (AC^2 - AB^2 - AD^2) = \frac{11}{2}$$

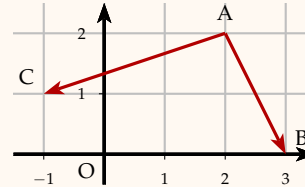
2^e définition : définition analytique

Dans un **repère orthonormé** (O, \vec{i}, \vec{j}) , le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est égal à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$



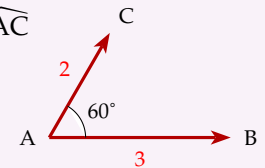
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 1(-3) + (-2)(-1) = -1$$

3^e définition : définition projective

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= AB \times AC \times \cos \widehat{BAC} \\ &= 3 \times 2 \times \cos 60^\circ \\ &= 6 \times \frac{1}{2} = 3 \end{aligned}$$



Remarque :

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} > 0 &\Leftrightarrow \widehat{BAC} < 90^\circ \\ \vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0 &\Leftrightarrow \widehat{BAC} > 90^\circ \end{aligned}$$

Propriétés algébriques du produit scalaire

- Commutativité : $\forall \vec{u}, \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad \text{car } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$$

- Bilinéarité : $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}$

$$\vec{u} (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{et} \quad (a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab \times \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Détecteur d'angle droit

Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} non nuls :

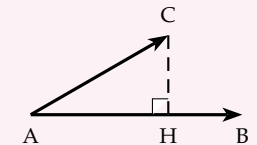
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \\ \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont portés par des droites} \\ \text{perpendiculaires} \end{cases}$$

Le produit scalaire dans le plan

Théorème de la projection

Soit H la projeté orthogonal de C sur la droite (AB), on a alors :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$$



Relation d'Al-Kashi

Généralisation du théorème de Pythagore.

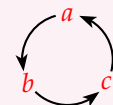
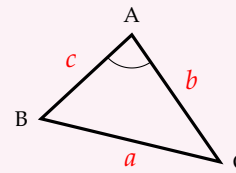
a, b et c sont les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B et C. On a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

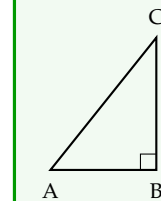
Par permutation circulaire :

$$\bullet b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \hat{B}$$

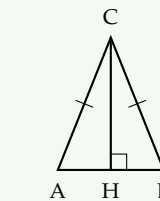
$$\bullet c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$



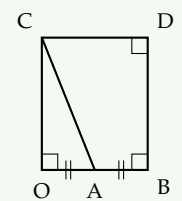
Quelques applications de la projection



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB^2$$



$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} AB^2$$



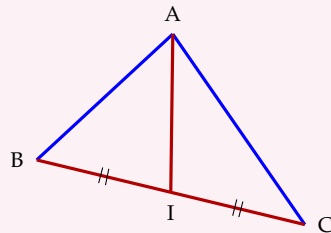
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -AB^2$$

Théorème de la médiane

(à savoir démontrer!)

Soit I le milieu du segment [BC],
alors pour tout point A du plan :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$$



Démonstration

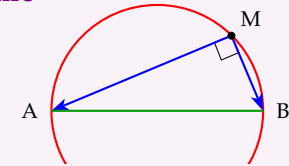
$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= (\vec{AI} + \vec{IB})^2 + (\vec{AI} + \vec{IC})^2 \\ &= AI^2 + 2 \times \vec{AI} \cdot \vec{IB} + IB^2 + AI^2 + 2 \times \vec{AI} \cdot \vec{IC} + IC^2 \\ &= 2AI^2 + 2 \times \vec{AI} \cdot (\vec{IB} + \vec{IC}) + \underbrace{IB^2 + IC^2}_{IB=IC=\frac{BC}{2}} \end{aligned}$$

$\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

Cercle et produit scalaire

$$\begin{cases} M \in \mathcal{C} \\ \text{de diamètre [AB]} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{AMB est rectangle en M} \\ \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \end{cases}$$



On appelle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r .

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M^2 = r^2 \\ (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2 \end{cases}$$

Méthode : savoir réduire une forme développée d'un cercle pour trouver ses éléments caractéristiques (centre et rayon). Soit le cercle \mathcal{C} d'équation :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - x + 6y + \frac{21}{4} = 0 &\Leftrightarrow (x^2 - x) + (y^2 + 6y) + \frac{21}{4} = 0 \Leftrightarrow \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y + 3)^2 - 9 + \frac{21}{4} = 0 &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + 3)^2 = 4 \end{aligned}$$

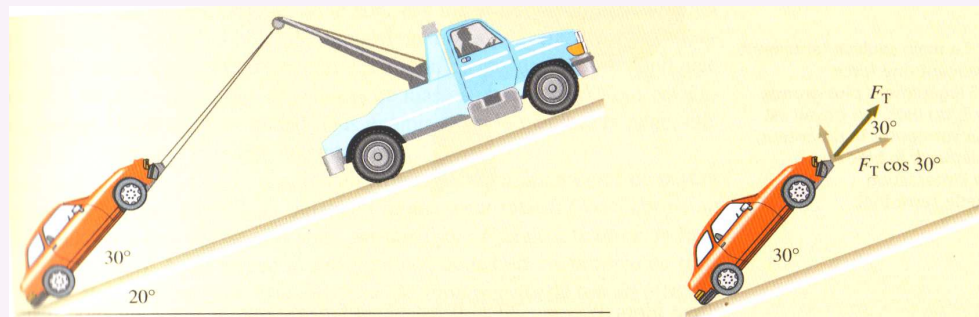
\mathcal{C} est un cercle de centre $\Omega \left(\frac{1}{2}; -3\right)$ et de rayon $r = 2$

Application du produit scalaire à la physique : travail d'une force

Le travail d'une force est une des origines du produit scalaire en mathématique. Le travail W « work » de cette force F mesure la participation d'une force dans le déplacement d'un mobile. Il est défini comme le produit scalaire du vecteur force \vec{F} par le vecteur déplacement $\vec{\ell}$. Il se mesure en joules.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\ell}$$

Une dépanneuse remorque une voiture en panne sur une côte de 20° . La tension du câble est constante et les deux véhicules ont une accélération constante. En supposant que le câble fait un angle de 30° avec le plan de la route et que la tension est de 1600 N , quel est le travail effectué par la dépanneuse sur la voiture si celle-ci la remorque sur une distance de 500 m sur cette route en pente.



L'angle de la route n'a pas d'importance ici. On a alors :

$$W = \vec{F}_T \cdot \vec{\ell} = F_T \times \ell \times \cos 30^\circ = 1600 \times 500 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 400\,000\sqrt{3} \text{ J} \approx 692,82 \text{ kJ}$$