

Équation réduite d'une droite

Soit une droite (D), non verticale. Elle admet une **unique** équation **réduite** de la forme :

$$y = mx + p$$

- $m \in \mathbb{R}$, désigne le **coefficient directeur** (ou pente). Il renseigne sur l'inclinaison de la droite.
- $p \in \mathbb{R}$ est appelé « **ordonnée à l'origine** »

- Si $m = 0$, la droite (D) est **horizontale**

Résumé droites du plan

Représentation graphique

Exemple : Tracer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , la droite d'équation $y = -2x + 5$ (1)

Méthode : On construit un tableau de valeurs :

x	0	1	2
y	5	3	1
$(x;y)$	(0;5)	(1;3)	(3;1)

On choisit 2 ou 3 valeurs de x .
On calcule les « y »
On obtient les points de (D)

⚠ On choisit judicieusement les valeurs de « x » de façon à avoir un tracé précis i.e. des points suffisamment éloignés.

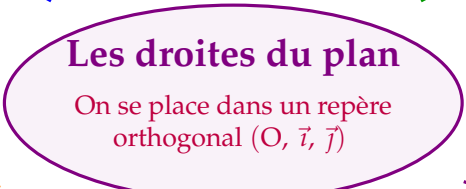
Calcul de m et lecture graphique

- Calcul algébrique : soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points de la droite (D) tels que $x_A \neq x_B$ on a :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{et} \quad p = y_A - mx_A$$
- ⚠ Si la droite est tracée, il faut s'assurer que le signe de m est cohérent avec l'allure de la droite...
- Lecture graphique

ici $m = -\frac{1}{2}$

⚠ Privilégier les nœuds du quadrillage pour lire m .



Vecteur directeur et équation réduite

Si une droite (D) est donnée par son **équation réduite**, elle admet pour **vecteur directeur** $\vec{u}(1; m)$ ou tout vecteur colinéaire à \vec{u}

Soient (D) : $y = mx + p$ et (D') : $y = m'x + p'$

- Si $m = m'$ alors, (D) // (D')
- Si $m \neq m'$ alors, (D) et (D') **sécantes**

⚠ Si $m m' = -1$ alors, (D) \perp (D') (cf produit scalaire)

Droites particulières

- Les droites **verticales** : $x = a, a \in \mathbb{R}$
L'équation $x = 0$ représente l'axe des ordonnées.
Pas de coefficient directeur. La **pente est « infinie »**.
Les droites verticales sont dirigées par le vecteur $\vec{j}(0; 1)$ ou tout autre vecteur colinéaire à \vec{j}
- Les droites **horizontales** : $y = p, p \in \mathbb{R}$
L'équation $y = 0$ représente l'axe des abscisses.
Le coefficient directeur est **nul**.
Les droites horizontales sont dirigées par le vecteur $\vec{i}(1; 0)$ ou tout autre vecteur colinéaire à \vec{i} .

Équation cartésienne d'une droite

Soit (D) une droite. Elle admet une équation cartésienne i.e. une description de la forme :

$$ax + by + c = 0, \quad \text{où } (a; b) \neq (0; 0)$$

⚠ Cette équation n'est pas unique.

- Si $b = 0$, la droite (D) est **verticale**.
- Si $a = 0$, la droite (D) est **horizontale**.

La droite (D) admet :

- pour **vecteur directeur** $\vec{u}(-b; a)$ ou tout vecteur colinéaire à \vec{u} ;
- pour **vecteur normal** $\vec{n}(a; b)$ ou tout vecteur colinéaire à \vec{n} . On a alors $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$

Droites parallèles et droites sécantes

Soient $\begin{cases} (D) : ax + by + c = 0 \\ (D') : a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

- (D) // (D') $\Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}$ **colinéaires**
 $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{u}') = 0 \Leftrightarrow -ba' - a(-b') = 0$
- Si (D) et (D') sont **sécantes** en I, les coordonnées de I sont **solutions** du système $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

Méthode pour déterminer une équation cartésienne

Soient les point A(1 ; 2) et B(3 ; -4).

Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

$M(x ; y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et \overrightarrow{AB} colinéaires

$$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 3-1 \\ y-2 & -4-2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -6(x-1) - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow -6x + 6 - 2y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -6x - 2y + 10 = 0 \stackrel{\div(-2)}{\Leftrightarrow} 3x + y - 5 = 0$$

Quelques contextes et questions classiques

- Une **droite** est définie par 2 points distincts ou par un point et une vecteur directeur (non nul).

- **Vecteur et coefficient directeur**

(D) : $3x + 5y + 2 = 0$ alors un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

L'équation réduite (D) : $y = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{3}$ a pour coefficient directeur $m = -\frac{3}{5}$

- Lorsqu'il s'agit de démontrer que trois droites sont **concourantes**, on détermine le point d'intersection I des deux premières droites et l'on vérifie que I appartient à la troisième!

Remarque : Bien entendu, s'il s'agit de droites remarquables du triangle : médianes, hauteurs, médiatrices ou bissectrices, d'après leurs propriétés, on peut affirmer qu'elles sont concourantes sans avoir à le démontrer.

- Un contexte fréquent est celui d'une famille « **infinie** » de droites

Exemple : Soit $m \in \mathbb{R}$, on pose $d_m : (2m+3)x - (m-1)y - 10 = 0$

Le principe : À chaque valeur du paramètre m , on associe une droite :

Si $m = 1$ alors $d_1 : 5x - 10 = 0$ droite verticale.

Si $m = 2$ alors $d_2 : 7x - y - 10 = 0$ etc.

Dans ces exercices, il s'agit d'étudier les propriétés de cette famille.