Résumé de Cours **:** *LA DERIVATION*

PROF: ATMANI NAJIB **1BAC SM**

http:// abcmaths.e-monsite.com

LA DERIVATION

A) Dérivation en un point et Dérivé à droite et dérivé à gauche.

1) f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre $\boldsymbol{a}$.

f est dérivable en a si la limite $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie le note $f'(a)$:Le nombre dérivé de la fonction f en a

2) f est dérivable en a ssi

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ Finie

*3)*Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$ où $r > 0$

f est dérivable à droite de a si la limite $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie : $f'_d(a)$

2) f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r, a]$ où $r > 0$

f est dérivable à gauche de a si la limite $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie : $f'_g(a)$

3) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de centre a.

f est dérivable en a ssi elle dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

4) Toute fonction dérivable en a est continue en a.

B) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) si f est dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme : $u(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$

2)Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative C_f admet une tangente (T) en $A(a, f(a))$ d'équation :$(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

3) Si f est dérivable à droite de a, alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a :

$(T_d): y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$:$\boldsymbol{x \geq a}$

4) Si f est dérivable à gauche de a, alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a :

$(T_g): y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$: $\boldsymbol{x \leq a}$

5) Si f est dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ on dit que **l**a courbe représente un point anguleux en $A(a, f(a))$

C) Dérivabilité sur un intervalle.

1) f est dérivable sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est dérivable en tout point de $]a, b[$

2) f est dérivable sur le semi-ouvert $[a, b[$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a

3 f est dérivable sur le fermé $[a, b]$ si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a et à gauche de b

D)Monotonie et extremums d'une fonction : concavité ; points d'inflexions

1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et et $\boldsymbol{a} \in I$

Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a) = 0$

2) Si f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors sa courbe représentative admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

3) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

4)a) f' est positive sur I ssi f est croissante sur I.

b) f' est négative sur I ssi f est décroissante

c) f' est nulle sur I ssi f est constante sur I.

5)Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement croissante sur I

6)Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement négatif sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement décroissante sur I

7) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a

8) f est deux fois dérivable sur un intervalle$I$.

a) Si f''est positive sur I alors C_f est convexe sur I.

b) Si f'' est négative sur I alors C_f est concave sur I.

c) Si f'' s'annule en $\boldsymbol{a}$ en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

à suivre : Formulaire de dérivées

Formulaire de dérivées

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
x^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$	$\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$, $\mathbb{R}^*$ si $n \leqslant -1$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Dérivées et opérations

- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, $f+g$ est dérivable sur I et $(f+g)' = f' + g'$.
- Si f est dérivable sur I et si λ est un réel, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f'g + fg'$.
- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Si f est dérivable sur I, si g est dérivable sur J et si pour tout x de I, $f(x) \in J$, $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$.
  Cette dernière formule fournit en particulier le tableau suivant :

Fonction	Dérivée	Domaine de dérivabilité
f^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$nf'f^{n-1}$	en tout réel où f est dérivable
$1/f$	$-\dfrac{f'}{f^2}$	en tout réel où f est dérivable et non nulle
$\dfrac{1}{f^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$	$-\dfrac{nf'}{f^{n+1}}$	en tout réel où f est dérivable et non nulle
f^n, $n \in \mathbb{Z}^*$	$nf'f^{n-1}$	
$\sqrt{f}$	$\dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$	en tout réel où f est dérivable et strictement positive
e^f	$f'e^f$	en tout réel où f est dérivable
$\ln(f)$	$\dfrac{f'}{f}$	en tout réel où f est dérivable et strictement positive
$\sin(f)$	$f' \cos(f)$	en tout réel où f est dérivable
$\cos(f)$	$-f' \sin(f)$	en tout réel où f est dérivable