Feuilles d'exercices : Sommes, produits, récurrences

Exercice 1

Exprimer à l'aide du symbole Σ les expressions suivantes :

1. $S_1 = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots + 3^{15}$
2. $S_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \cdots + \dfrac{10}{1\ 024}$
3. $S_3 = a + \dfrac{a^2}{2} + \dfrac{a^3}{3} + \cdots + \dfrac{a^n}{n}$
4. $S_4 = 2 - 4 + 6 - 8 + \cdots + 50$

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1)$
2. $\displaystyle\sum_{k=945}^{k=2009} 3$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k}$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k}$
8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2$
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}}$

Exercice 3

Déterminer trois réels a, b et c tels que $\forall k \geqslant 2$, $\dfrac{k-5}{k(k^2-1)} = \dfrac{a}{k-1} + \dfrac{b}{k} + \dfrac{c}{k+1}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$.

Exercice 4

Il s'agit d'une méthode alternative à celle du cours pour calculer la sommes des carrés d'entiers.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k^3$.
2. En développant $(k+1)^3$, exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3$ à l'aide de sommes classiques.
3. En comparant les deux calculs précédents, retrouver la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k^2$.

Exercice 5

Calculer les sommes doubles suivantes :
$\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$; $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$; $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{j}$; $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$ et $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j$

Exercice 6

Calculer les produits suivants :

1. $\prod\limits_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$
2. $\prod\limits_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
3. $\prod\limits_{k=1}^{k=n}(6k-3)$

Exercice 7

Montrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall n \geqslant 4,\ 2^n \leqslant n!$
2. $\forall n \geqslant 1,\ n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6.
3. $\forall n \geqslant 1,\ \sum\limits_{k=1}^{k=n} k\times k! = (n+1)!-1$
4. $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum\limits_{k=1}^{k=2^n}\frac{1}{k} \geqslant 1+\frac{n}{2}$

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6)$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$.

Exercice 10

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Calculer les premiers termes de la suite, émettre une conjecture sur la valeur de u_n, puis la prouver par récurrence.

Exercice 11

On va prouver par récurrence sur n la propriété P_n : n crayons placés dans une trousse sont nécessairement tous de la même couleur. Pour $n = 1$, c'est vrai (s'il y a un seul crayon, tous les crayons sont bien de la même couleur), donc P_1 est vérifiée. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que n crayons sont toujours de la même couleur, et essayons de prouver P_{n+1}. Prenons donc $n+1$ crayons (par exemple numérotés), et enlevons le dernier. Par hypothèse de récurrence, les n crayons restants sont de la même couleur. Remettons alors le dernier, et enlevons-en un autre, le premier par exemple. Toujours par hypothèse de récurrence, tous les crayons restants sont de la même couleur, donc le dernier crayon est en fait de la même couleur que tous les autres et P_{n+1} est prouvée. Conclusion : par principe de récurrence, quel que soit l'entier n, n crayons sont toujours de la même couleur.

Où est l'erreur ?

Feuilles d'exercices : corrigé

Exercice 1

1. $S_1 = \sum_{k=2}^{k=15} 3^k$
2. $S_2 = \sum_{i=1}^{i=10} \frac{i}{2^i}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a^k}{k}$
4. $S_4 = \sum_{i=1}^{i=25} -2i(-1)^i$

Exercice 2

1. $\sum_{k=1}^{k=n}(2k+1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1) + n = n(n+2)$
2. $\sum_{k=945}^{k=2009} 3 = 3 \times 1\ 065 = 3\ 195$
3. $\sum_{k=1}^{k=n}(6k^2+4k+1) = 6\sum_{k=1}^{k=n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{k=n} k + \sum_{k=1}^{k=n} 1 = n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$
   $= n((n+1)(2n+1) + 2(n+1) + 1) = n(2n^2+5n+4)$
4. $\sum_{k=1}^{k=n}(-1)^k = \sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^{k+1} = -\frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} = \frac{(-1)^n - 1}{2}$
5. $\sum_{k=1}^{k=n} k(2k^2-1) = 2\sum_{k=1}^{k=n} k^3 - \sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n(n+1)-1)}{2}$
   $= \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}$
6. $\sum_{k=1}^{k=18} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{k=18} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{k=18} \left(\frac{1}{3}\right)^k - 1 = \frac{1-\frac{1}{3^{19}}}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{19}}\right) - 1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^{18}}\right)$
7. $\sum_{k=1}^{k=n} 3^{2k} = \sum_{k=1}^{k=n} 9^k = \sum_{k=0}^{k=n} 9^k - 1 = \frac{1-9^{n+1}}{1-9} - 1 = \frac{9^{n+1}-1}{8} - 1 = \frac{9^{n+1}-9}{8}$
8. $\sum_{k=1}^{k=n} 2^k + k^2 + 2 = \sum_{k=1}^{k=n} 2^k + \sum_{k=1}^{k=n} k^2 + \sum_{k=1}^{k=n} 2 = \sum_{k=0}^{k=n} 2^k - 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2n$
   $= 2^{n+1} - 2 + 2n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 2(2^n + n - 1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
9. $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{2^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\sum_{k=0}^{k=n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{9}\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

Exercice 3

Pour déterminer les réels, le mieux est de partir du résultat, tout mettre au même dénominateur puis identifier : $\frac{a}{k-1}+\frac{b}{k}+\frac{c}{k+1}=\frac{ak(k+1)+b(k-1)(k+1)+ck(k+1)}{(k-1)k(k+1)}=\frac{ak^2+ak+bk^2-b+ck^2+ck}{k(k^2-1)}$. En identifiant, on obtient les conditions $a+b+c=0$; $a+c=1$ et $-b=-5$, soit $b=5$ puis $a=-2$ et $c=-3$ en résolvant le petit système.

On en déduit que $\sum_{k=2}^{k=n}\frac{k-5}{k(k^2-1)}=\sum_{k=2}^{k=n}\frac{-2}{k-1}+\frac{5}{k}+\frac{-3}{k+1}=-2\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k-1}+5\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k+1}=$ $-2\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{1}{k}+5\sum_{k=2}^{k=n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=3}^{k=n+1}\frac{1}{k}=-2\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}-2-1+5\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}+\frac{5}{2}+\frac{5}{n}-3\sum_{k=3}^{k=n-1}\frac{1}{k}-\frac{3}{n}-\frac{3}{n+1}=$ $-\frac{1}{2}+\frac{2}{n}-\frac{3}{n+1}$.

Exercice 4

1. C'est une somme télescopique : $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3=\sum_{k=2}^{k=n+1}k^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3=(n+1)^3-1$.
2. Comme $(k+1)^3=k^3+3k^2+3k+1$, on a $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3=\sum_{k=1}^{k=n}k^3+3\sum_{k=1}^{k=n}k^2\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1$.
3. Reprenons le calcul de la question précédente : on a en écrivant les choses légèrement différemment $\sum_{k=1}^{k=n}(k+1)^3-\sum_{k=1}^{k=n}k^3=3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1$, soit en utilisant le résultat de la première question $3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\sum_{k=1}^{k=n}k+\sum_{k=1}^{k=n}1=(n+1)^3-1$, ou encore $3\sum_{k=1}^{k=n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+n=(n+1)^3-1=n^3+3n^2+3n$.

   Faisons passer tout ce qu'on peut à droite : $3\sum_{k=1}^{k=n}k^2=n^3+3n^2+3n-\frac{3}{2}n^2-\frac{3}{2}n-n=n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n=$ $\frac{n(2n^2+3n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. On retrouve donc la formule $\sum_{k=1}^{k=n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5

- $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}ij=\sum_{i=1}^{i=n}i\sum_{j=1}^{j=n}j=\sum_{i=1}^{i=n}i\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}ij=\sum_{j=1}^{j=n}j\sum_{i=1}^{i=j}i=\sum_{j=1}^{j=n}j\frac{j(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{j=n}j^3+j^2=\frac{n^2(n+1)^2}{8}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ (on peut factoriser si on le souhaite le résultat obtenu...).
- $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{i}{j}=\sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{i=n}i=\frac{n(n+1)}{2}\sum_{j=1}^{j=n}\frac{1}{j}$ et comme on ne sait pas calculer cette dernière somme, on est bloqués. En fait, il est plus intéressant de calculer $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}$ qui pour le coup donne quelque chose de complètement calculable.
- $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|=\sum_{j=1}^{j=n}(\sum_{i=1}^{i=j}(j-i)+\sum_{i=j+1}^{i=n}(i-j))=\sum_{j=1}^{j=n}(j^2-\frac{j(j+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{j(j+1)}{2}-(n-j)j)=$ $\sum_{j=1}^{j=n}\left(j^2-(n+1)j+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)^2}{2}+\frac{n^2(n+1)}{2}$ $=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}-(n+1)+n\right)=\frac{n(n+1)(2n-2)}{6}=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}$

- $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i2^j = \sum_{i=1}^{i=n} i\sum_{j=1}^{j=n} 2^j = \frac{n(n+1)}{2}\times(\sum_{j=0}^{j=n} 2^j - 1) = \frac{n(n+1)}{2}\times(2^{n+1}-1-1) = n(n+1)(2^n-1)$

Exercice 6

1. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{k-1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n} k-1}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} = \frac{1}{n}$

2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{k=n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{k=n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^{k=n}(k-1)\prod_{k=2}^{k=n}(k+1)}{\left(\prod_{k=2}^{k=n}\right)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{k=n-1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k}\times\frac{\prod_{k=3}^{k=n+1} k}{\prod_{k=2}^{k=n} k} =$
   $\displaystyle\frac{1}{n}\times\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}$

3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}(6k-3) = \prod_{k=1}^{k=n}3(2k-1) = 3^n\prod_{k=1}^{k=n}(2k-1) = 3^n\frac{\prod_{k=1}^{k=2n} k}{\prod_{k=1}^{k=n} 2k} = 3^n\frac{(2n)!}{2^n\times n!} = \left(\frac{3}{2}\right)^n\frac{(2n)!}{n!}$

Exercice 7

1. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $2^n \leqslant n!$. Puisque l'énoncé nous indique que n doit être plus grand que 4, in itialisons pour $n=4$: on a alors $2^4=16$ et $4!=24$, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, c'est-à-dire que $2^n \leqslant n!$. On peut alors en déduire que $2^{n+1} \leqslant 2n! \leqslant (n+1)n! = (n+1)!$ puisque 2 est certainement inférieur à $n+1$ quand n est plus grand que 4. La propriété P_{n+1} est donc vraie, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 4.
2. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 6. Pour $n=1$, on a $1\times(2+1)\times(7+1)=24$, qui est bien divisible par 6, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée et notons pour simplifier les calculs $a_n = n(2n+1)(7n+1)$. On a alors $a_{n+1}-a_n = (n+1)(2n+3)(7n+8) - n(2n+1)(7n+1) = (2n^2+5n+3)(7n+8)-(2n^2+n)(7n+1) = 14n^3+16n^2+35n^2+40n+21n+24-14n^3-2n^2-7n^2-n = 42n^2+60n+24 = 6(7n^2+10n+4)$, donc $a_{n+1}-a_n$ est divisible par 6. or, par hypothèse de récurrence, a_n est aussi divisible par 6, donc a_{n+1} est une somme de deux nombres divisibles par 6, et il est donc lui-même divisible par 6. La propriété P_{n+1} est donc vérifiée, et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
3. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k\times k! = (n+1)!-1$. Pour $n=1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=1} k\times k! = 1\times 1! = 1$ et $2!-1=2-1=1$, donc P_1 est vraie. Supposons désormais P_n vraie pour un certain entier n, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n+1} k\times k! = \sum_{k=1}^{k=n} k\times k! + (n+1)(n+1)! = (n+1)!-1+(n+1)(n+1)! = (n+1)!(1+n+1)-1 = (n+2)!-1$, donc P_{n+1} est vérifiée et par principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
4. Prouvons par récurrence la propriété P_n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2^n}\frac{1}{k} \geqslant 1+\frac{n}{2}$. Pour $n=0$, le membre de gauche se réduit à 1, et celui de droite vaut également 1, donc l'inégalité est vraie. Supposons désormais P_n vraie, on a alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2^{n+1}}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{k=2^n}\frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{k=2^{n+1}}\frac{1}{k} \geqslant 1+\frac{n}{2}+\sum_{k=2^n+1}^{k=2^{n+1}}\frac{1}{k}$ par hypothèse de récurrence. Reste à minorer la deuxième somme : elle est constituée de 2^n termes dont le plus petit vaut $\displaystyle\frac{1}{2^{n+1}}$,

elle est donc supérieure ou égale à $2^n \times \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$, donc la somme totale est plus grande que $1 + \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$, ce qui prouve $P_n + 1$. Par principe de récurrence, P_n est donc vraie pour tout entier n.

Exercice 8

On calcule $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$, $u_4 = 15$, et ça devrait suffire à conjecturer que $u_n = 2^n - 1$. Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2^n - 1$. C'est vrai pour $n = 0$, et si on le suppose vérifié au rang n, alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$, ce qui prouve P_{n+1}. Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 9

Prouvons donc par récurrence la propriété $P_n : u_n = 2n + \frac{1}{3^n}$. Pour $n = 0$, $2 \times 0 + \frac{1}{3^0} = 1 = u_0$, donc P_0 est vraie. Supposons désormais P_n vérifiée, on a alors $u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 4n + 6) = \frac{1}{3}(2n + \frac{1}{3^n} + 4n + 6) = \frac{1}{3^{n+1}} + 2n + 2 = \frac{1}{3^{n+1}} + 2(n+1)$, ce qui prouve P_{n+1}, et par principe de récurrence, P_n est vraie pout tout entier n.

Exercice 10

On calcule $u_3 = 3 \times 2 - 3 \times 0 + 0 = 6$, $u_4 = 3 \times 6 - 3 \times 2 + 0 = 12$, $u_5 = 3 \times 12 - 3 \times 6 + 2 = 20$, $u_6 = 3 \times 20 - 3 \times 12 + 6 = 30$, et même avec un peu de motivation $u_7 = 3 \times 30 - 3 \times 20 + 12 = 42$. Si on est suffisamment réveillés, on arrive à conjecturer que $u_n = n(n-1)$ (chaque terme est le produit de l'indice par l'entier le précédent). Prouvons donc par récurrence **triple** la propriété $P_n : u_n = n(n-1)$. Il faut initialiser en vérifiant P_0, P_1 et P_2, ce qui ne pose aucun problème puisqu'on a de quoi vérifier jusqu'à P_7 grâce aux calculs précédents. Supposons désormais P_n, P_{n+1} et P_{n+2} vérifiées, on a alors $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + (n-1)n = 3(n^2 + 3n + 2) - 3(n^2 + n) + n^2 - n = 3n^2 + 9n + 6 - 3n^2 - 3n + n^2 - n = n^2 + 5n + 6 = (n+3)(n+2)$, ce qui prouve P_{n+3}, et par principe de récurrence triple, P_n est vraie pour tout entier n.

Exercice 11

L'erreur se situe dans la preuve de l'hérédité, qui ne fonctionne pas quand n est égal à 1. En effet, dans ce cas, quand on rajoute le crayon $n+1$ et qu'on enlève le premier crayon, le dernier crayon n'est de la même couleur d'aucun autre crayon que lui-même, et les deux crayons n'ont donc aucune raison d'être de la même couleur !