Nombres complexes – Ecriture algébrique d'un complexe
Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche :

- **Exercice 1 :** calculs dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes (addition, soustraction, multiplication, division) et écriture algébrique d'un complexe
- **Exercice 2 :** puissances de i
- **Exercice 3 :** partie réelle et partie imaginaire d'un complexe, notions de réel et d'imaginaire pur
- **Exercices 4 et 5 :** conjugué d'un nombre complexe
- **Exercices 6 et 7 :** affixe d'un point et point-image
- **Exercice 8 :** affixe d'un vecteur et affixe d'un barycentre
- **Exercice 9 :** module d'un complexe
- **Exercice 10 :** résolution d'équation dans l'ensemble des complexes
- **Exercice 11 :** détermination d'un lieu géométrique / caractérisation d'un ensemble de points (cercle, droite…)

***Exercice 1** (2 questions)*

Soient les complexes $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = 2 + i$.

Calculer :

$z_1 + z_2$ $\quad$ $z_2 - z_1$ $\quad$ $z_1 \times z_2$ $\quad$ ${z_1}^2$ $\quad$ $\frac{z_1}{z_2}$

et donner le résultat sous sa forme algébrique.

Correction de l'exercice

Rappels :

- **Ensemble des nombres complexes**

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, contient tous les nombres réels, ainsi que tous les nombres écrits sous la forme $a + bi$ où a et b sont des réels. Autrement dit, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication (ainsi que d'une soustraction et d'une division), qui possèdent les mêmes propriétés et règles de calcul que dans $\mathbb{R}$. On convient également que $i^2 = -1$.

- **Écriture algébrique d'un complexe**

L'écriture $a + bi$ d'un complexe (avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$) est appelée la **FORME ALGÉBRIQUE** ou **ÉCRITURE CARTÉSIENNE** de ce complexe.

- **Somme de deux complexes**

$z_1 + z_2 = 1 - 2i + 2 + i = 1 + 2 - 2i + i = 3 - i$

- **Différence de deux complexes**

$z_2 - z_1 = 2 + i - (1 - 2i) = 2 + i - 1 + 2i = 2 - 1 + i + 2i = 1 + 3i$

- **Produit de deux complexes**

$z_1 \times z_2 = (1 - 2i)(2 + i) = 1 \times 2 + 1 \times i - 2i \times 2 - 2i \times i = 2 + i - 4i - 2\underbrace{i^2}_{=-1} = 2 - 3i - 2 \times (-1)$

$= 2 - 3i + 2 = 2 + 2 - 3i = 4 - 3i$

- **Puissance d'un complexe**

${z_1}^2 = \underbrace{(1 - 2i)^2 = 1^2 - 2 \times 1 \times 2i + (2i)^2}_{(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2} = 1 - 4i + 2^2 \times i^2 = 1 - 4i + 4 \times (-1) = 1 - 4i - 4$

$= 1 - 4 - 4i = -3 - 4i$

- **Quotient de deux complexes**

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-2i}{2+i}=\frac{(1-2i)(2-i)}{\underbrace{(2+i)(2-i)}_{\substack{\text{on mutliplie } (2+i)\\ \text{par } (2-i) \text{ pour mettre}\\ \text{en évidence l'identité}\\ \text{remarquable}\\ (A+B)(A-B)=A^2-B^2}}}=\frac{2-i-4i+2i^2}{2^2-i^2}=\frac{2-5i+2\times(-1)}{4-(-1)}=\frac{2-5i-2}{4+1}=\frac{-5i}{5}=-i$$

Remarques importantes :

- Lorsqu'on effectue des additions ou soustractions de nombres complexes, on utilise en général leur forme algébrique. En revanche, lorsqu'on effectue des multiplications ou divisions de nombres complexes (non nuls), on utilise en général leur **écriture exponentielle**.
- Il n'existe **pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$** qui prolongerait celle de $\mathbb{R}$ et qui obéirait par conséquent aux mêmes règle des signes.

Exercice 2 *(4 questions)*

1- Calculer i^2, i^3 et i^4.
2- En déduire i^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3- Que vaut i^{2011} ?
4- Calculer $1+i+i^2+\cdots+i^{2011}$.

Correction de l'exercice 2

1- Calculons i^2, i^3 et i^4.

- $i^2=-1$
- $i^3=i^{2+1}=i^2\times i^1=-1\times i=-i$
- $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$

2- Tout d'abord, remarquons que :

- $i^5=i^4\times i=1\times i=i=i^1$
- $i^6=i^4\times i^2=1\times(-1)=-1=i^2$
- $i^7=i^4\times i^3=1\times(-i)=-i=i^3$
- $i^8=(i^4)^2=1^2=1=i^0$

Soient q et r, deux entiers naturels désignant respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n (entier naturel) par 4.

On a donc $n=4q+r$ avec $0\le r\le 3$.

- Si $r = 0$, c'est-à-dire si $n = 4q$, alors $i^n = i^{4q} = (i^4)^q = 1^q = 1$
- Si $r = 1$, c'est-à-dire si $n = 4q + 1$, alors $i^n = i^{4q+1} = i^{4q} \times i^1 = (i^4)^q \times i = 1^q \times i = 1 \times i = i$
- Si $r = 2$, c'est-à-dire si $n = 4q + 2$, alors $i^n = i^{4q+2} = i^{4q} \times i^2 = (i^4)^q \times (-1) = 1^q \times (-1) = -1$
- Si $r = 3$, c'est-à-dire si $n = 4q + 3$, alors $i^n = i^{4q+3} = i^{4q} \times i^3 = (i^4)^q \times (-i) = 1^q \times (-i) = -i$

En résumé, en posant $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$.

$$i^n = \begin{cases} 1 \; si \; n = 4q \\ i \; si \; n = 4q + 1 \\ -1 \; si \; n = 4q + 2 \\ -i \; si \; n = 4q + 3 \end{cases}$$

Remarque : Les entiers naturels n tels que i^n est un imaginaire pur sont donc de la forme $n = 4q + 1$ ou $n = 4q + 3$. Les entiers naturels n tels que i^n est un réel sont quant à eux de la forme $n = 4q$ ou $n = 4q + 2$.

3- Calculons i^{2011}.

La division euclidienne de 2011 par 4 donne : $2011 = 2008 + 3 = 4 \times 502 + 3$. Ici, $r = 3$.

Donc $i^{2011} = i^3 = -i$. En effet, $i^{2011} = i^{4\times502+3} = i^{4\times502} \times i^3 = (i^4)^{502} \times i^3 = 1^{502} \times i^3 = i^3 = -i$

4- Calculons $1 + i + i^2 + \cdots + i^{2011}$.

Tout d'abord, remarquons que $1 + i + i^2 + \cdots + i^{2011} = i^0 + i^1 + i^2 + \cdots + i^{2011}$. Il s'agit donc de la somme de termes d'une suite géométrique de premier rang $i^0 = 1$ et de raison i.

Rappel : Somme des termes d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Alors la somme S des termes consécutifs de cette suite est donnée par la formule :

$$S = premier\ terme\ de\ la\ somme \times \frac{1 - q^{nombre\ de\ termes\ de\ la\ somme}}{1 - q}$$

Autrement dit, avec $n \geq p \geq n_0$ où n_0 désigne le rang à partir duquel la suite (u_n) est définie :

$$S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Ainsi, on obtient :

$$1 + i + i^2 + \cdots + i^{2011} = i^0 + i^1 + i^2 + \cdots + i^{2011} = \sum_{k=0}^{2011} i^k = \underbrace{1}_{1^{er}\ terme} \times \frac{1 - i^{2011-0+1}}{1 - i} = \frac{1 - i^{2012}}{1 - i}$$

$$= \frac{1 - i \times i^{2011}}{1 - i} = \frac{1 - i \times (-i)}{1 - i} = \frac{1 + i^2}{1 - i} = \frac{1 - 1}{1 - i} = 0$$

Exercice 3 ***(2 questions)***

On pose $z = x + yi$ avec x et y réels.

1- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $Z = (1+z)^2 + (1+z)i$.
2- A quelle(s) condition(s) Z est-il un réel ?

Correction de l'exercice 3

Rappels : Partie réelle et partie imaginaire d'un complexe

Soit z un complexe écrit sous sa forme algébrique $z = a + bi$ (avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$).

- On dit alors que a est la **PARTIE RÉELLE** de z et on la note $a = Re(z)$.
- On dit par ailleurs que b est la **PARTIE IMAGINAIRE** de z et on la note $b = Im(z)$.

On pose $z = x + yi$ avec x et y réels.

1- Déterminons la partie réelle et la partie imaginaire de $Z = (1+z)^2 + (1+z)i$.

Pour tous réels x et y,

$$Z = (1+z)^2 + (1+z)i = 1 + 2z + z^2 + i + zi = 1 + 2(x+yi) + (x+yi)^2 + i + (x+yi)i$$

$$= 1 + 2x + 2yi + x^2 + 2xyi + y^2i^2 + i + xi + yi^2 = 1 + 2x + 2yi + x^2 + 2xyi - y^2 + i + xi - y$$

$$= 1 + 2x + x^2 - y^2 - y + 2yi + 2xyi + i + xi = (x^2 + 2x - y^2 - y + 1) + (x + 2y + 2xy + 1)i$$

Ainsi,

$$Re(Z) = x^2 + 2x - y^2 - y + 1 \qquad\qquad Im(Z) = x + 2y + 2xy + 1$$

2- A quelle condition Z est-il un réel ?

Rappels : Notions de réel et d'imaginaire pur

Soit z un complexe écrit sous sa forme algébrique $z = \underbrace{a}_{Re(z)} + \underbrace{b}_{Im(z)} i$ (avec $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$).

- z est un **RÉEL** si et seulement si $Im(z) = 0$.
- z est un **IMAGINAIRE PUR** si et seulement si $Re(z) = 0$.

Z est un réel si et seulement si $Im(Z) = 0$.

Or, pour tous x et y réels,

$$Im(Z) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 2xy + 1 = 0 \Leftrightarrow 2xy + 2y + x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2y(x+1) + x + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow (x+1)(2y+1)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \; ou \; 2y+1=0 \Leftrightarrow x=-1 \; ou \; y=-1/2$

En conclusion, Z est un réel si et seulement si $z=-1+yi$ (y réel quelconque) ou $z=x-i/2$ (x réel quelconque).

Exercice 4 ***(1 question)***

Montrer que, pour tout nombre complexe z, $z+\bar{z}=2Re(z)$ et $z-\bar{z}=2i\,Im(z)$.

Correction de l'exercice 4

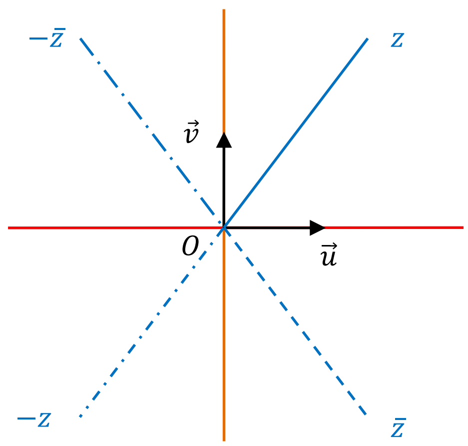
Rappel : Conjugué d'un nombre complexe

Le **CONJUGUÉ** du nombre complexe $z=a+ib$ (avec a et b réels) est le nombre complexe, noté $\bar{z}$, tel que :

$$\bar{z}=a-ib$$

Soit un nombre complexe $z=a+ib$ (avec a et b réels). Alors son conjugué $\bar{z}$ est tel que $\bar{z}=a-ib$. Alors :

- $z+\bar{z}=a+ib+a-ib=a+a+ib-ib=2a=2Re(z)$
- $z-\bar{z}=a+ib-(a-ib)=a+ib-a+ib$
  $=a-a+ib+ib=2ib=2i\,Im(z)$



Remarque : Autrement dit, on peut traduire ces résultats par les équivalences suivantes :

- z est un réel si, et seulement si, $z=\bar{z}$
- z est un imaginaire pur si, et seulement si, $z=-\bar{z}$

Exercice 5 ***(1 question)***

Déterminer les nombres complexes dont le carré est égal au conjugué.

Correction de l'exercice 5

Soit un nombre complexe $z=a+ib$ (avec a et b réels).

- Alors le carré de z, noté z^2, est :

$$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 + 2abi + (ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = \underbrace{a^2 - b^2}_{Re(z^2)} + \underbrace{2ab}_{Im(z^2)}\ i$$

- Le conjugué de z, noté $\bar{z}$, est :

$$\bar{z} = \overline{a+ib} = a - ib = \underbrace{a}_{Re(\bar{z})} + \underbrace{(-b)}_{Im(\bar{z})} i$$

Rappel : Egalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont **ÉGAUX** si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Déterminons les nombres complexes z dont le carré est égal à leur conjugué. Résolvons donc l'équation $z^2 = \bar{z}$.

$$z^2 = \bar{z} \Leftrightarrow \underbrace{a^2 - b^2}_{Re(z^2)} + \underbrace{2ab}_{Im(z^2)}\ i = \underbrace{a}_{Re(\bar{z})} + \underbrace{(-b)}_{Im(\bar{z})} i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = a \\ 2ab = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - b^2 = 0 \\ 2ab + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - b^2 = 0 \\ b(2a+1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - b^2 = 0 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} a^2 - a - b^2 = 0 \\ 2a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - b^2 = 0 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} a^2 - a - b^2 = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 0^2 = 0 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - b^2 = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a = 0 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - b^2 = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a(a-1) = 0 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} b^2 = \frac{3}{4} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} b = \sqrt{\frac{3}{4}} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} ou \begin{cases} b = -\sqrt{\frac{3}{4}} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases} ou \begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} ou \begin{cases} b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow z = 0\ ou\ z = 1\ ou\ z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\ ou\ z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Les solutions S de l'équation $z^2 = \bar{z}$ sont :

$$S = \left\{0\,;1\,;\,-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\,;\,-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right\}$$

Exercice 6 ***(2 questions)***

Donner l'écriture algébrique de $z = (1+i)^8$. Qu'en déduire pour le point d'affixe z ?

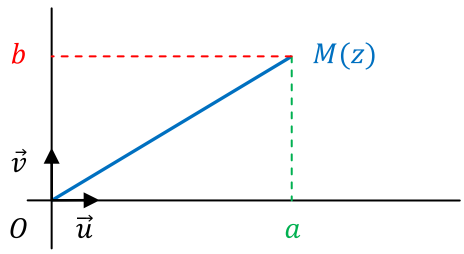
Correction de l'exercice 6

Rappel : Point-image d'un complexe et affixe d'un point

Soit $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ un repère orthonormal du plan.

A tout nombre complexe $z = a + bi$ (avec a et b réels), on peut associer l'unique point M de coordonnées $(a\,;\, b)$.

On dit alors que M est le **POINT-IMAGE** de z et que z est l'**AFFIXE** du point M.



L'axe $(O\,;\vec{u})$ est appelé **AXE DES RÉELS** et l'axe $(O\,;\vec{v})$ est appelé **AXE DES IMAGINAIRES PURS**.

Le plan est quant à lui appelé **PLAN COMPLEXE**.

$z = (1+i)^8 = [(1+i)^2]^4 = (1^2 + 2\times 1\times i + i^2)^4 = (1+2i-1)^4 = (2i)^4 = 2^4 \times i^4 = 16\times 1 = 16$
Autrement dit, on a $z = 16 + 0i$ (écriture algébrique du complexe z).

Il en résulte que le point d'affixe z se trouve sur l'axe des réels et plus précisément sur la demi-droite $[O\vec{u})$ du plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

Exercice 7 *(1 question)*

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, placer les points A, B et C d'affixes respectives $2+i$, $-1+2i$, $1-2i$.

Correction de l'exercice 7

Notons z_A, z_B et z_C les abscisses respectives des points A, B et C.

- $z_A = 2 + i = 2 + 1i$

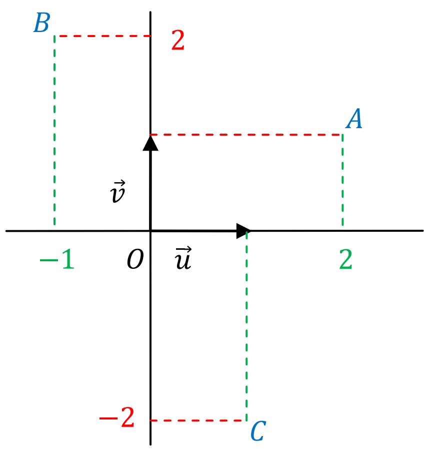
A, de coordonnées $(2\,;1)$, est donc le point-image de z_A.

- $z_B = -1 + 2i$

B, de coordonnées $(-1\,;2)$, est donc le point-image de z_B.

- $z_C = 1 - 2i = 1 + (-2)i$

C, de coordonnées $(1\,;-2)$, est donc le point-image de z_C.



Exercice 8 *(1 question)*

Dans le plan complexe, $3+i$, $2-2i$, $2i$ et $1+5i$ désignent les affixes respectives des points A, B, C et D.

Prouver, de deux manières différentes, que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

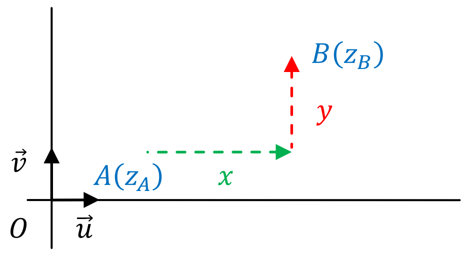
Correction de l'exercice 8

Rappel : Affixe d'un vecteur

Soit $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ un repère orthonormal du plan complexe.

L'**AFFIXE** z du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est la différence de l'affixe z_B du point B et de l'affixe z_A du point A.

Autrement dit, $z = z_B - z_A = x + yi$ (avec a et b réels) ; le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x\,;\ y)$.



Rappel : Affixe d'un barycentre

Soient $(A_1\,;\ \alpha_1)$, $(A_2\,;\ \alpha_2)$, …, $(A_n\,;\ \alpha_n)$ n points pondérés du plan complexe, d'affixes respectives z_1, z_2, …, z_n tels que : $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

Alors leur **BARYCENTRE** G a pour affixe, notée z_G, la moyenne pondérée de leur affixe :

$$z_G = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \cdots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$$

Remarque : Le milieu d'un segment $[AB]$ est l'isobarycentre des points $(A\,;\ 1)$ et $(B\,;\ 1)$.

Commençons par placer dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3+i$, $z_B = 2-2i$, $z_C = 2i$ et $z_D = 1+5i$.

- **1ère méthode :**

Rappel : Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.

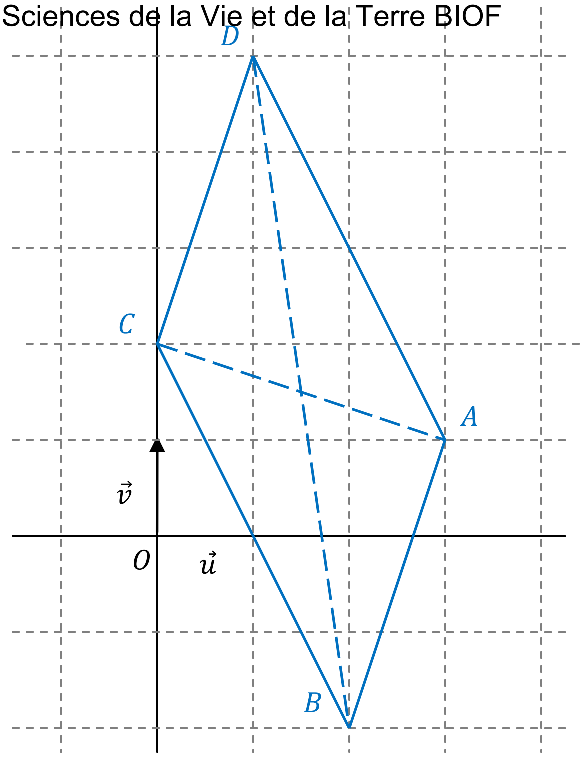
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$ et on a : $z_B - z_A = 2-2i-(3+i) = 2-2i-3-i = -1-3i$

Par ailleurs, le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $z_C - z_D$ et on a : $z_C - z_D = 2i-(1+5i) = 2i-1-5i = -1-3i$

Ainsi, $z_B - z_A = z_C - z_D$. Autrement dit, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux. $ABCD$ est par conséquent un parallélogramme.

- $2^{\text{ème}}$ **méthode :**

Rappel : Un quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.



D'une part, la diagonale $[AC]$ du quadrilatère $ABCD$ a pour milieu :

$$\frac{1z_A + 1z_C}{2} = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3 + i + 2i}{2} = \frac{3 + 3i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

D'autre part, la diagonale $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ a pour milieu :

$$\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{2 - 2i + 1 + 5i}{2} = \frac{3 + 3i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i = \frac{z_A + z_C}{2}$$

Ainsi, les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du quadrilatère $ABCD$ ont même milieu donc $ABCD$ est un parallélogramme. Le centre du quadrilatère $ABCD$ a pour affixe $(3 + 3i)/2$.

Exercice 9 *(1 question)*

Déterminer le module des nombres complexes suivants : 3, $-4i$, $-2 + i$, $-1 - i$ et $2 - 2i\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 9

Rappel : Module d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe écrit sous sa forme algébrique $a + bi$ (avec a et b réels). Le **MODULE** de z est le nombre réel positif, noté $|z|$, défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Soit le nombre complexe $z = 3$

$z = 3 = 3 + 0i$ donc $|z| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$

- Soit le nombre complexe $z = -4i$

$z = -4i = 0 + (-4)i$ donc $|z| = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$

- Soit le nombre complexe $z = -2 + i$

$z = -2 + i = -2 + 1i$ donc $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

- Soit le nombre complexe $z = -1 - i$

$z = -1 - i = -1 + (-1)i$ donc $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

- Soit le nombre complexe $z = 2 - 2i\sqrt{3}$

$z = 2 - 2i\sqrt{3} = 2 + (-2\sqrt{3})i$ donc $|z| = \sqrt{2^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + 4 \times 3} = 4$

Remarque importante : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, si M a pour affixe z, alors $|z| = OM$. Autrement dit, le module de z correspond à la distance entre le point M d'affixe z et l'origine du repère O d'affixe 0.

Plus généralement, si z_A et z_B désignent les affixes respectives de deux points A et B dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, alors $|z_B - z_A| = |z_A - z_B| = AB$

Exercice 10 *(1 question)*

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $3z^2 + 2z + 2 = 0$ d'inconnue z.

Rappel : Equation du second degré à coefficients réels

Soit $az^2 + bz + c$ un trinôme du second degré (avec a, b et c réels tels que $a \neq 0$). $\Delta = b^2 - 4ac$

	solutions de $az^2 + bz + c = 0$	factorisation de $az^2 + bz + c$
$\Delta = 0$	$z_0 = \frac{-b}{2a}$ $z_0 \in \mathbb{R}$	$a(z - z_0)^2$
$\Delta > 0$	$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ $z_1 \in \mathbb{R}$ et $z_2 \in \mathbb{R}$	$a(z - z_1)(z - z_2)$
$\Delta < 0$	$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ $\quad z_2 = \frac{-b+i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$ $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$; $z_2 = \overline{z_1}$	$a(z - z_1)(z - z_2)$

Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $3z^2 + 2z + 2 = 0$ d'inconnue z.

Soit Δ le discriminant du trinôme du second degré $3z^2 + 2z + 2$

$\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 2 = 4 - 24 = -20.$

$\Delta < 0$ donc le trinôme admet deux racines complexes distinctes :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{|-20|}}{2 \times 3} = \frac{-2 - i\sqrt{20}}{6} = \frac{-2 - 2i\sqrt{5}}{6} = \frac{-1 - i\sqrt{5}}{3}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1 + i\sqrt{5}}{3}$$

Exercice 11 *(1 question)*

Dans chacun des cinq cas suivants, déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1- $z^2 \in \mathbb{R}$
2- $z^2 \in \mathbb{R}i$
3- $|z - 2i| = 2$
4- $z + \bar{z} = |z|^2$
5- $|z - 2i| = |z - 1 - i|$

Correction de l'exercice 11

1- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^2 \in \mathbb{R}$.

Rappel : Interprétation géométrique du conjugué d'un complexe

Soit z un nombre complexe.

- z est un réel si, et seulement si, $z = \bar{z}$
- z est un imaginaire pur si, et seulement si, $z = -\bar{z}$

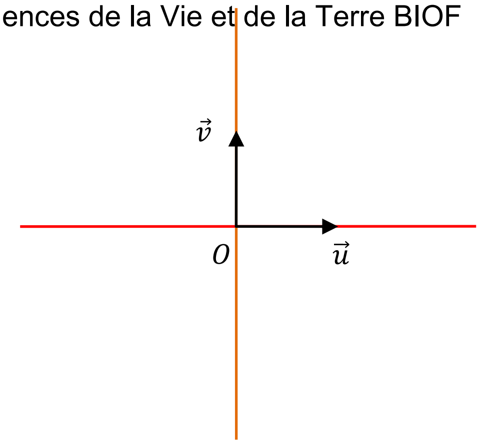
z^2 est un réel si, et seulement si, il est égal à son conjugué. Autrement dit,

$$z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 = \overline{z^2} \Leftrightarrow z^2 - \overline{z^2} = 0 \Leftrightarrow z^2 - \bar{z}^2 = 0 \Leftrightarrow (z - \bar{z})(z + \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \ ou \ z + \bar{z}$$

$\Leftrightarrow z = \bar{z} \ ou \ z = -\bar{z}$

$\Leftrightarrow$ z est un réel *ou* z est un imaginaire pur

L'ensemble des points M cherchés est la réunion de l'axe des réels et de l'axe des imaginaires purs d'un repère du plan complexe.



Remarque : On pouvait également remarquer que : $z^2 = a - b^2 + 2abi$ et donc que $Re(z^2) = a - b^2$ et $Im(z^2) = 2ab$. Or, z^2 est un réel si et seulement si $Im(z^2) = 0 \Leftrightarrow 2ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$
$\Leftrightarrow z = bi \text{ ou } z = a$

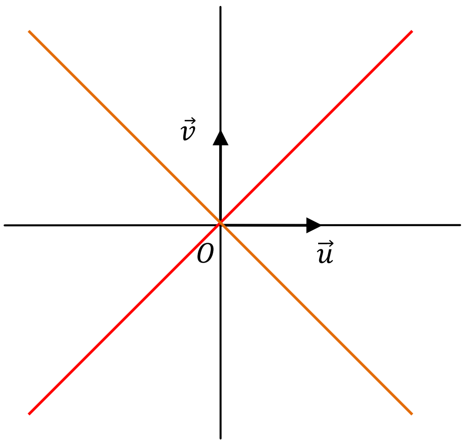
2- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z^2 \in \mathbb{R}i$.

Soit z un nombre complexe écrit sous sa forme algébrique $a + bi$ (avec a et b réels).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

$z^2 \in \mathbb{R}i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi \in \mathbb{R}i \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow (a - b)(a + b) = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ ou } a = -b$

L'ensemble des points M recherchés est la réunion des deux droites d'équations respectives $a = b$ et $a = -b$ dans un repère du plan complexe.



Remarque : On appelle **première bissectrice** du plan la droite d'équation $a = b$ et **deuxième bissectrice** du repère la droite d'équation $a = -b$.

3- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = 2$

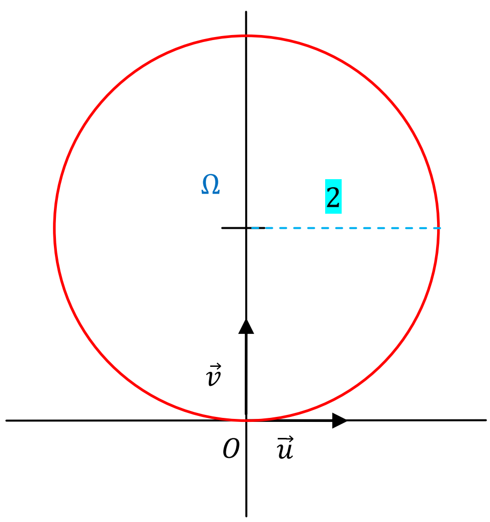
Soit Ω le point d'affixe $z_\Omega = 2i$ et soit M le point d'affixe z. Alors $|z - 2i| = 2 \Leftrightarrow |z - z_\Omega| = 2 \Leftrightarrow \Omega M = 2$.

Donc M appartient au cercle de centre $\Omega(2i)$ et de rayon 2.

Rappel : Caractérisation d'un cercle

Soit r un réel positif et soient z et z_Ω deux nombres complexes.

L'ensemble des points M, d'affixe z, tels que $|z - z_\Omega| = r$ est le **CERCLE** de centre Ω, d'affixe z_Ω, et de rayon r.



4- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z + \bar{z} = |z|^2$

Soit z un nombre complexe écrit sous sa forme algébrique $a + bi$ (avec a et b réels).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

- $z = a + bi$
- $\bar{z} = a - bi$
- $|z|^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = a^2 + b^2$

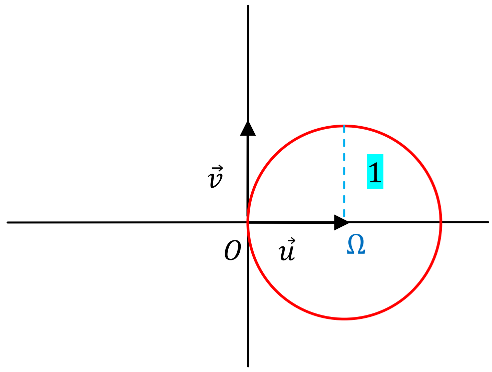
D'où :

$z + \bar{z} = |z|^2 \Leftrightarrow a + bi + a - bi = a^2 + b^2$

$\Leftrightarrow 2a = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + b^2 = 0$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 - 1 + b^2 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + b^2 = 1$

$\Leftrightarrow (a - 1)^2 + (b - 0)^2 = 1^2$



Donc M appartient au cercle de centre Ω d'affixe $z_\Omega = 1 + 0i = 1$ et de rayon 1.

Rappel : Equation d'un cercle

Soit r un réel positif et soit un point Ω de coordonnées $(x_\Omega\ ;\ y_\Omega)$ (x_Ω et y_Ω réels) . L'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ (x et y réels), tels que $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$, est le **CERCLE** de centre Ω et de rayon r.

5- Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2i| = |z - 1 - i|$.

Soit A le point d'affixe $z_A = 2i$, soit B le point d'affixe $z_B = 1 + i$ et soit M le point d'affixe z.

Alors $|z - 2i| = |z - 1 - i| \Leftrightarrow |z - (2i)| = |z - (1 + i)| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$.

Donc M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$, avec $A(2i)$ et $B(1 + i)$.

Rappel : Caractérisation de la médiatrice d'un segment

Soient A et B deux points du plan complexe, d'affixes respectives z_A et z_B. L'ensemble des points M, d'affixe z, tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la **MÉDIATRICE** du segment $[AB]$.