Exercice n°9. Précisez l'ensemble de définition puis résoudre les inéquations suivantes :

1) $\ln(2+5x) \leq \ln(x+6)$ **2)** $\ln(x-1)+\ln(x-3) < \ln 3$ **3)** $\ln x \geq 2$ **4)** $\dfrac{2(1+\ln x)}{x} > 0$

5) $(\ln x)^2 + \ln x - 6 \leq 0$ **6)** $\ln(2x-5) \geq 1$ **7)** $(1{,}2)^n \geq 4$, $n \in \mathbb{N}$ **8)** $(0{,}8)^n \leq 0{,}1$, $n \in \mathbb{N}$

Exercice n°10. Un capital de 5000 euros est placé à intérêts composés au taux annuel de 6%.
Déterminer le nombre d'années n à partir duquel le capital acquis sera supérieur à 12000 euros

Exercice n°11. Etudier le signe des expressions suivantes :

$A(x) = \ln x(\ln x + 1)$ $B(x) = 2x\ln(1-x)$ $C(x) = -x^2 \ln(x+1)$

Exercice n°12. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln(x^2+3x-4)$ **2)** $f : x \to \ln\left(\dfrac{4-x^2}{x}\right)$ **3)** $f : x \to \ln(4-x^2) - \ln x$ **4)** $f : x \to \ln(x^2-4) - \ln(-x)$

Exercice n°13. Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2 + \ln x)$ **2)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\ln x$ **3)** $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln 2 - 3\ln x)$ **4)** $\lim\limits_{x\to 0} (x - 4 + \ln x)$ **5)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln x^2$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x}$ **7)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln x$ **8)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ (Poser $X = \dfrac{1}{x}$) **9)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$ (Poser $X = 2x$)

Exercice n°14.
Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer les dérivées des fonctions ci-dessous

1) $f(x) = -\dfrac{x}{2} + 1 + 2\ln x$ **2)** $f(x) = \dfrac{2\ln x}{\ln 3}$ **3)** $f(x) = \ln(4-x) + \ln x$

4) $f(x) = x\ln x - x$ **5)** $f(x) = x^2 \ln x$ **6)** $f(x) = \ln(2x-5)$

7) $f(x) = \ln(-3x+1)$ **8)** $f(x) = \ln(x^2+x+1)$ **9)** $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

10) $f(x) = \ln(\ln x)$ **11)** $f(x) = x\ln(2x-3)$ **12)** $f(x) = 2x(1-\ln x)$

13) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ **14)** $f(x) = \dfrac{x - \ln x}{x^2}$ **15)** $f(x) = (\ln x)^2 - 2\ln x - 4$

16) $f(x) = \ln x^2$ **17)** $f(x) = (\ln x)^2$ **18)** $f(x) = \ln 1 - x^2$

Exercice n°15. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(ax+b)$, et C sa courbe représentative.

1) Déterminer les nombres a et b tels que $f(2) = 0$ et $f'(3) = \dfrac{3}{4}$

Quel est alors l'ensemble de définition de f ? Quel est le sens de variation de f ?

2) Déterminer les nombres a et b tels que la courbe C passe par le point A(2 ;0) et la tangente en A ait pour coefficient directeur –2.

Exercice n°16.

Partie I

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1) Etudier le sens de variation de g

2) En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1+\ln x}{x}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm)

1) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote à la courbe (C). Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) sur $]0;+\infty[$. Montrer que (Δ) coupe (C) en un point A que l'on précisera

3) Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f

4) Montrer qu'il existe un unique point B de la courbe (C) où la tangente (T) est parallèle à (Δ). Préciser les coordonnées du point B

5) Montrer que l'équation $f(x)=0$ a une unique solution α. Exprimer $\ln(\alpha)$ en fonction de α. Montrer que le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est supérieur à 1. On admettra que $0,31<\alpha<0,35$

6) Représenter succinctement la courbe (C) et les droites (Δ) et (T).

<u>Exercice n°17.</u>

Partie I

La fonction *f* est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$

1) Etudier le sens de variations de *f* . Calculer le slimites de *f* aux bords de l'ensemble de définition et dresser le tableau de variations de *f*.

2) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution *l* dans l'intervalle $]0;+\infty[$. Déterminer l'entier *n* tel que $l\in]n;n+1[$

3) Déterminer le signe de $f(x)$

Partie II

La fonction *g* est définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ -\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x & \text{si } x>0 \end{cases}$

1) Montrer que la fonction *g* est continue en 0. Déterminer la limite de *g* en $+\infty$

2) Montrer que pour tout $x>0$, $g'(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$

3) Montrer que On calcule $g\left(\frac{1}{l}\right)=\frac{1+4l}{8l^2}$. Dresser le tableau de variation de *g*.

4) Donner les équations des tangentes à la courbe Γ représentative de *g* aux points d'abscisses 1 et $\frac{1}{l}$. Calculer $\lim_{x\to 0} g'(x)$ et interpréter graphiquement cette limite.

5) Représenter succinctement Γ et ses tangentes dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

<u>Exercice n°18.</u> Déterminez une primitive de la fonction *f* proposée sur l'intervalle *I* donné :

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$ sur I= $]0;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$ sur I= $]0;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ I= $]0;+\infty[$

4) $f(x)=\frac{3}{3x-4}$ sur I= $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

5) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur I= $]-1;+\infty[$

6) $f(x)=\frac{1}{x+1}$ sur I= $]-\infty;-1[$

7) $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ sur $]2;+\infty[$

8) $f(x)=\frac{1}{3x-5}$ sur $[2;+\infty[$

9) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$

10) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$

<u>Exercice n°19.</u>

On considère la fonction définie sur I= $[4;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x^2-3x-4}{x-2}$

1) Trouver trois réels *a*,*b*, et *c* tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}$

2) En déduire une primitive de *f* sur $[4;+\infty[$

Exercice n°20. Déterminez une primitive de la fonction f proposée sur l'intervalle I donné :

1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ sur I= $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ **2)** $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur I= $[1;+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ sur $]1;+\infty[$ **4)** $f(x)=\tan x$ sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

Exercice n°21. Calculez les intégrales

1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x+1}$ **2)** $\displaystyle\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2}dx$ **3)** $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{4}{1-5x}dx$ **4)** $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2}dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx$ **6)** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ **7)** $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-x)}{x-1}dx$

Exercice n°22.

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$

1) Montrez que pour tout x de $]1;+\infty[$, $f(x)=x+4+\dfrac{3}{x-1}$

2) Calculez $\displaystyle\int_4^2 \frac{x^2+3x-1}{x-1}dx$

Exercice n°23.

Soit f la fonction définie sur $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{6x^2+13x+4}{3x+2}$

1) Trouver trois nombres réels a, b et c tels que pour tout x de $\left]-\dfrac{2}{3};+\infty\right[$, $f(x)=ax+b-\dfrac{c}{3x+2}$

2) Calculez $\displaystyle\int_0^2 \frac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx$

Exercice n°24. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x\ln x-x$

1) Déterminez la dérivée g' de g

2) Calculez $\displaystyle\int_1^e \ln x dx$

Exercice n°25. Calculez l'intégrale I en utilisant la formule d'intégration par parties: $I=\displaystyle\int_1^e x\ln x dx$

Exercice n°26.

On considère l'application f_n définie pour tout t de $\mathbb{R}^{+*}$ par $f_n(t)=\dfrac{1}{t\left(t^n+1\right)}$, où n est un entier strictement positif.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel t strictement positif : $f_n(t)=\dfrac{1}{t\left(t^n+1\right)}=\dfrac{at^{n-1}+b}{t^n+1}+\dfrac{c}{t}$

2) Montrer que : $\displaystyle\int_1^2 f_n(t)=\ln\left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)$

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer : $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^{n-1}\ln t}{\left(t^n+1\right)^2}$

Exercice n°27.

On considère la suite (u_n) de réels strictement positifs, définie par : $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et préciser la nature de la suite (u_n).

2) Déterminer la monotonie de la suite (u_n), et préciser sa limite.

3) Exprimer la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de *n*.

4) Exprimer la somme $\sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$ en fonction de *n*. En déduire le calcul de $u_1 \times u_2 \times ... \times u_n$ en fonction de *n*.

Exercice n°28.

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ et C*f* sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1) Donner la dérivée de *f*.
2) Donner le sens de variation de *f*.
3) Donner une équation de la tangente à C*f* au point d'abscisse 1.
4) Donner une primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5) Quel est le sens de variation de la fonction G définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $G(x) = \int_1^x f(t)dt$

Exercice n°29.

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2}\left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$

1) Déterminer la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ lorsque *x* tend vers 0. *f* est-elle dérivable en 0 ?

2) Etudier le sens de variations de *f* et étudier la limite de *f*en $+\infty$

3) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[e;+\infty[$

4) Soit *T* la tangente à la courbe représentative (*C*) de *f* au point d'abscisse 1. Déterminer l'équation de T.

5) Tracer la courbe représentative *C*) de *f* et la droite *T* dans un repère orthonormal $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

6) Soit $\lambda \in]0;e]$. On opse $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{e} f(x)dx$

a) Calculer $I(\lambda)$ pour $\lambda \in]0;e]$

b) Calculer la limite de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers 0

c) En déduire l'aire de la partie d plan limité par la courbe (*C*), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $(x=0)$ et $(x=e)$

Exercice n°30.

Soit la fonction *f* définie par $f(x) = x\ln(|x|)$

1) Donner le domaine de définition *D* de la fonction *f* ; déterminer une parité éventuelle ; et étudier leslimites aux bornes du domaine de définition. Calculer pour tout *x* de *D* la dérivée de *f* (si elle existe !)

2) On étudie, pour cette question, le cas $x > 0$. Montrer qu'il existe un unique λ tel que $f'(\lambda) = 0$; montrer que l'on a ; $0,3 \le \lambda \le 0,4$ (on pourra utiliser le fait que le réel *e* tel que $\ln e = 1$ vérifie $2,5 \le e \le 3$

3) En déduire le tableau de variations de *f* (sur *D*)

4) Déterminer une primitive de *g* définie par $g(x) = \ln(x)$ (on précisera le domaine sur lequel on travaille

FONCTION LOGARITHME NEPERIEN
CORRECTION

Exercice n°1

1) $A=\ln 8=\ln\left(2^3\right)=\boxed{3\ln 2}$ $\quad B=\ln\frac{1}{16}=\ln\left(\frac{1}{2^4}\right)=-\ln\left(2^4\right)=\boxed{-4\ln 2}$

$C=\frac{1}{2}\ln 16=\frac{1}{2}\ln\left(2^4\right)=\frac{1}{2}\times 4\ln(2)=\boxed{2\ln 2}$ $\quad D=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}\ln 4=-\frac{1}{2}\ln\left(2^2\right)=-\frac{1}{2}\times 2\ln(2)=\boxed{-\ln(2)}$

2) $a=\ln 24=\ln(3\times 8)=\ln 3+\ln\left(2^3\right)\boxed{=\ln 3+3\ln 2}$

$b=\ln 144=\ln\left(12^2\right)=2\ln(12)=2\ln\left(3\times 2^2\right)=2\left[\ln 3+\ln\left(2^2\right)\right]=2\left[\ln 3+2\ln(2)\right]\boxed{=2\ln 3+4\ln 2}$

$c=\ln\frac{8}{9}=\ln 8-\ln 9=\ln\left(2^3\right)-\ln\left(3^2\right)\boxed{=3\ln 2-2\ln 3}$

3) $A=2\ln 3+\ln 2+\ln\frac{1}{2}=\ln\left(3^2\right)+\ln\left(2\times\frac{1}{2}\right)=\ln 9+\underbrace{\ln(1)}_{0}=\boxed{\ln 9}$

$B=\frac{1}{2}\ln 9-2\ln 3=\ln\left(\sqrt{9}\right)-2\ln 3=\ln 3-2\ln 3=-\ln 3\boxed{=\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$

Exercice n°2

A partir de $\ln(2)\approx 0,7$ et $\ln(3)\approx 1,1$ à 10^{-1} près, on calcule :

$\ln(4)=\ln\left(2^2\right)=2\ln(2)\approx 2\times 0,7\approx 1,4$ $\quad \ln(6)=\ln(2\times 3)=\ln(2)+\ln(3)\approx 0,7+1,1\approx 1,8$

$\ln(9)=\ln\left(3^2\right)=2\ln(3)\approx 2\times 1,1\approx 2,2$ $\quad \ln(8)=\ln\left(2^3\right)=3\ln(2)\approx 3\times 0,7\approx 2,1$

$\ln(27)=\ln\left(3^3\right)=3\ln(3)\approx 3\times 1,1\approx 3,3$ $\quad \ln(72)=\ln(9\times 8)=\ln 9+\ln 8\approx 2,2+2,1\approx 4,3$

$\ln(216)=\ln(3\times 72)=\ln 3+\ln 72\approx 1,1+4,3\approx 5,4$

$\ln\left(\frac{1}{6}\right)=-\ln 6\approx -1,8$ $\quad \ln\left(\frac{1}{16}\right)=-\ln 16=-\left(\ln 2^4\right)=-4\ln(2)\approx -4\times 0,7\approx -2,8$

D'où le tableau

a	2	3	4	6	9	8	27	72	216	$\ln\left(\frac{1}{6}\right)$	$\ln\left(\frac{1}{16}\right)$
$\ln(a)$	**0,7**	**1,1**	**1,4**	**1,8**	**2,2**	**2,1**	**3,3**	**4,3**	**5,4**	**-1,8**	**-2,8**

Exercice n°3

On transforme les écritures : $x=3\ln 2=\ln\left(2^3\right)=\ln 8$ et $y=2\ln 3=\ln\left(3^2\right)=\ln 9$

Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, on aura $\ln 8<\ln 9$ c'est-à-dire $\boxed{x<y}$

On transforme les écritures : $x=\ln 5-\ln 2=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ et $y=\ln 12-\ln 5=\ln\left(\frac{12}{5}\right)$

Puisque la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, et puisque $\frac{12}{5}<\frac{5}{2}$, on aura $\ln\left(\frac{12}{5}\right)<\ln\left(\frac{5}{2}\right)$, c'est-à-dire

$\boxed{x>y}$

Exercice n°4

$a=\ln\left(e^2\right)=2\ln(e)=2\times 1=2$ $\quad b=\ln\left(e^3\right)=3\ln(e)=3\times 1=3$

$c=\ln\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\ln(e^2)=-2\ln(e)=-2\times 1=-2$ $\quad d=\ln\left(\sqrt{e}\right)=\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}\ln(e)=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

$e=\ln\left(e\sqrt{e}\right)=\ln(e)+\ln(\sqrt{e})=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

Exercice n°5

1) On calcule

$$f(2)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000\times 2\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(100000\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(10^5\right)=\frac{20}{\ln(10)}\times 5\ln\left(10\right)\boxed{=100}\ ,$$

$$f(0,2)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000\times 0,2\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(10000\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(10^4\right)=\frac{20}{\ln(10)}\times 4\ln\left(10\right)\boxed{=80}\ ,$$

et $f(0,02)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000\times 0,02\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(1000\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(10^3\right)=\frac{20}{\ln(10)}\times 3\ln\left(10\right)\boxed{=60}$. Enfin,

$$f(p_0)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000p_0\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000\times 20\times 10^{-6}\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(1000000\times 10^{-6}\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(10^3\right)=\frac{20}{\ln(10)}\times\ln\left(1\right)\boxed{=0}$$

2) On résout :

$$f(p)\geq 120\Leftrightarrow\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000p\right)\geq 120\Leftrightarrow\ln\left(50000p\right)\geq\frac{120\times\ln\left(10\right)}{20}$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(50000p\right)\geq 6\ln\left(10\right)\Leftrightarrow\ln\left(50000p\right)\geq\ln\left(10^6\right)$$

Par stricte croissance de la fonction logarithme sur $]0;+\infty[$, on déduit $\ln\left(50000p\right)\geq\ln\left(10^6\right)\Leftrightarrow 50000p\geq 10^6$ donc

$\boxed{p\geq\frac{1000000}{50000}=20}$. La pression correspondant au niveau sonore de 120 décibels est donc de 20 Pascals

3) Pour tout réel $x\geq p_0$, on calcule

$$\boxed{f(10x)}=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000\times 10x\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(500000x\right)=\frac{20}{\ln(10)}\left[\ln\left(50000x\right)+\ln 10\right]$$

$$=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000x\right)+\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(10\right)\boxed{=f(x)+20}$$

le niveau sonore augmente de 20 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 10

4) Pour tout réel $x\geq p_0$, on calcule

$$\boxed{f(100x)}=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000\times 100x\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(5000000x\right)=\frac{20}{\ln(10)}\left[\ln\left(50000x\right)+\ln 100\right]$$

$$=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000x\right)+\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(100\right)=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000x\right)+\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(10^2\right)$$

$$=\frac{20}{\ln(10)}\ln\left(50000x\right)+\frac{20}{\ln(10)}\times 2\ln\left(10\right)\boxed{=f(x)+40}$$

le niveau sonore augmente de 40 décibels quand la pression s'exerçant sur le tympan est multipliée par 100

Exercice n°6

1) L'équation est définie si et seulement

$$\begin{cases}2+5x>0\\x+6>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\frac{2}{5}\\x>-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\\x\in]-6;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[\cap]-6;+\infty[=\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$$

Pour tout $x\in\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$, $\ln(2+5x)=\ln(x+6)\Leftrightarrow 2+5x=x+6\Leftrightarrow 4x=4\Leftrightarrow x=1$. Comme $1\in\left]-\frac{2}{5};+\infty\right[$, $S=\{1\}$

2) L'équation est définie si et seulement

$$\begin{cases}x-1>0\\x-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in]1;+\infty[\\x\in]3;+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow x\in]1;+\infty[\cap]3;+\infty[=]3;+\infty[$$

Pour tout $x\in]3;+\infty[$,

$\ln(x-1)+\ln\left(x-3\right)=\ln\left(3\right)\Leftrightarrow\ln\left(\left(x-1\right)\left(x-3\right)\right)=\ln\left(3\right)$ (car $\ln(a)+\ln(b)=\ln(a\times b)$)

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x-3\right)=3\Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow x\left(x-4\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $x=4$.

Mais $0\notin]3;+\infty[$ donc $S=\{4\}$

3) L'équation est définie si et seulement $x \in \left]0;+\infty\right[$

$\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2\times 1 \Leftrightarrow \ln x = 2\times \ln e \Leftrightarrow \ln x = \ln\left(e^2\right) \Leftrightarrow x = e^2$. $\boxed{S = \left\{e^2\right\}}$

4) L'équation est définie si et seulement $x \in \left]0;+\infty\right[$

$\dfrac{2(1+\ln x)}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0$ car une fraction est nulle ssi son numérateur l'est

$\Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$. $S = \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$

5) En posant $X = \ln x$, l'équation devient équivalente à l'équation du second degré $X^2 + X - 6 = 0$, que l'on sait résoudre : $X = 2$ ou $X = -3$ En revenant à la variable x on a : $X = 2 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$ et $X = -3 \Leftrightarrow \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$. Finalement, $\boxed{S = \left\{e^2; e^{-3}\right\}}$

6) L'équation est définie si et seulement $2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$

$\ln(2x-5) = 1 \Leftrightarrow \ln(2x-5) = \ln(e) \Leftrightarrow 2x - 5 = e \Leftrightarrow x = \dfrac{e+5}{2}$. Comme $\dfrac{e+5}{2} \in \left]\dfrac{5}{2};+\infty\right[$, $\boxed{S = \left\{\dfrac{e+5}{2}\right\}}$

7) L'équation $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right) = 0$ n'est définie que si et seulement si $\dfrac{x-1}{2x-1} > 0$.

On dresse un tableau de signes de l'expression $\dfrac{x-1}{2x-1}$: →

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$2x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{2x-1}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

L'équation $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right) = 0$ n'est donc définie que si et seulement si $x \in \left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]1;+\infty\right[$. En utilisant la bijectivité de la fonction ln, on obtient $\ln\left(\dfrac{x-1}{2x-1}\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 0$. Puisque $0 \in \left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]1;+\infty\right[$, on en conclut que $\boxed{S = \{0\}}$

8) L'équation $\ln\left(\left|\dfrac{x-1}{2x-1}\right|\right) = 0$ n'est définie que si et seulement si $\dfrac{x-1}{2x-1} \neq 0$, donc d'après le tableau de signes ci-dessus, que si et seulement si $x \in \left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]\dfrac{1}{2};1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$. En utilisant la bijectivité de la fonction ln, on obtient $\ln\left(\left|\dfrac{x-1}{2x-1}\right|\right) = 0 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x-1}{2x-1}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x-1} = 1$ ou $\dfrac{x-1}{2x-1} = -1$. La première équation a été résolue dans la question 2. La deuxième est $\dfrac{x-1}{2x-1} = -1 \Leftrightarrow x - 1 = -2x + 1 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$. Ces deux solutions appartenant à l'ensemble de définition de l'équation, on conclut que $\boxed{S = \left\{0;\dfrac{2}{3}\right\}}$

9) L'équation $\ln(x-1) = \ln(2x-1)$ est définie si et seulement si on a simultanément $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]1;+\infty\right[$ et $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, donc si et seulement si $x \in \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[\cap \left]1;+\infty\right[= \left]1;+\infty\right[$. On utilise la bijectivité de la fonction ln : Pour tout $x \in \left]1;+\infty\right[$, $\ln(x-1) = \ln(2x-1) \Leftrightarrow x - 1 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 0$. Or $0 \notin \left]1;+\infty\right[$, donc $\boxed{\text{l'équation n'admet ps de solution réelle}}$.

10) L'équation $\ln\left(|x-1|\right) = \ln(2x-1)$ est définie si et seulement si on a simultanément $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$ et $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, donc si et seulement si $x \in \left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[\cap \left(\left]-\infty;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\right) = \left]\dfrac{1}{2};1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$. On utilise la bijectivité de la fonction ln : Pour tout $x \in \left]\dfrac{1}{2};1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$, $\ln\left(|x-1|\right) = \ln(2x-1) \Leftrightarrow |x-1| = 2x - 1$, ce qui équivaut à deux équations : $x-1=2x-1 \Leftrightarrow x=0$ (déjà résolue dans la question 4) et $-x+1=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$. Puisque seule cette dernière solution appartient à l'ensemble de définition de l'équation, on conclut que $\boxed{S=\left\{\frac{2}{3}\right\}}$

11) L'équation $\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|)$ est définie si et seulement si on a simultanément $x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$ et $2x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, donc si et seulement si

$x\in\left(\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[\right)\cap\left(\left]-\infty;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[\right)=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};1\right\}$.

On utilise la bijectivité de la fonction ln : Pour tout $x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, $\ln(|x-1|)=\ln(|2x-1|)\Leftrightarrow |x-1|=|2x-1|$, ce qui équivaut à deux équations :

$x-1=2x-1\Leftrightarrow x=0$ (déjà résolue dans la question 4) et $-x+1=2x-1\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ (déjà résolue dans la question 10)

Puisque ces deux solutions appartiennent à l'ensemble de définition de l'équation, on conclut que $\boxed{S=\left\{0;\frac{2}{3}\right\}}$

<u>Exercice n°7</u>

1) $A(x)=(x-1)(x+1)(x-2)=(x^2-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$

2) (a) Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation $\ln(x^3+2)=\ln(2x^2+x)$.

L'équation est bien définie si et seulement si $\begin{cases}x^3+2>0\\2x^2+x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3>-2\\x(2x+1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\sqrt[3]{-2}\\x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[\end{cases}$.

L'ensemble de définition de l'équation est donc $\left]\sqrt[3]{-2};-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$. Par bijectivité de la fonction logarithme népérien, pour tout $x\in\left]\sqrt[3]{-2};-\frac{1}{2}\right[\cup\left]0;+\infty\right[$, $\ln(x^3+2)=\ln(2x^2+x)\Leftrightarrow x^3+2=2x^2+x\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$.

D'après la factorisation de la question (1), $x^3-2x^2-x+2=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)(x-2)=0$. Pour qu'un produit de facteurs soit nul, il faut et il suffit qu'au moins l'un d'entre eux le soit.
Ainsi $(x-1)(x+1)(x-2)=0\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ ou $x=2$. Les trois solutions sont compatibles avec l'ensemble de définition. Ainsi $\boxed{S_a=\{-1;1;2\}}$

(b) L'équation est définie sur $\mathbb{R}$, puisque les quantités $|x|^3+2$ et $2x^2+|x|$ sont strictement positives. En remarquant que pour tout réel x, $x^2=|x|^2$, on va poser $X=|x|$. L'équation $\ln(|x|^3+2)=\ln(2x^2+|x|)\Leftrightarrow\ln(|x|^3+2)=\ln(2|x|^2+|x|)$ devient alors équivalente à $\ln(X^3+2)=\ln(2X^2+X)$, avec la condition $X\geq 0$ (puisque $X=|x|$). D'après la question (a), on a X=-1 ; 1 2. La valeur X=-1 est éliminée par la condition $X\geq 0$ (l'équation $|x|=-1$ n'admet pas de solution). En « revenant » à l'inconnue x, on a donc $X=1\Leftrightarrow|x|=1\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$ ou $X=2\Leftrightarrow|x|=2\Leftrightarrow x=-2$ ou $x=2$. Ainsi $\boxed{S_b=\{-2;-1;1;2\}}$

(c) Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation $\ln(x^3-x^2-3x+3)=\ln(x^2-2x+1)$.

Notons $f(x)=x^3-x^2-3x+3$ et $g(x)=x^2-2x+1$. En remarquant que $f(1)=0$, on peut donc factoriser $f(x)$ par $x-1$. On obtient $f(x)=(x-1)(x^2-3)$, d'où une factorisation aboutie égale à $f(x)=(x-1)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$, qui nous permet de dresser le tableau de signes de $f(x)$:

x		$-\sqrt{3}$		1		$\sqrt{3}$	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-\sqrt{3}$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$x+\sqrt{3}$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi $f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left]-\sqrt{3};1\right[\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[$

L'étude du signe de $g(x)=x^2-2x+1$ est plus simple puisque pour tout réel x, $g(x)=(x-1)^2$, donc $g(x)>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;1\right[\cup \left]1;+\infty\right[$.

Les deux conditions devant être réalisées simultanément, l'ensemble de définition de l'équation est donc $\left]-\sqrt{3};1\right[\cup \left]\sqrt{3};+\infty\right[$

Par bijectivité de la fonction logarithme népérien,

$\ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=\ln\left(x^2-2x+1\right) \Leftrightarrow x^3-x^2-3x+3=x^2-2x+1 \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$

Cette dernière équation ayant pour solution –1 ; 1 et 2, par compatibilité avec l'ensemble de définition de l'équation, on obtient $\boxed{S_c=\{-1;2\}}$

(d) Examinons d'abord l'ensemble de définition de l'équation $\ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=2\ln(1-x)$.

Le membre de gauche $\ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)$ est défini si et seulement si $x\in \left]-\sqrt{3};1\right[\cup \left]\sqrt{3};+\infty\right[$ (cf question (e)), tandis que le membre de droite est défini si et seulement si $1-x>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;1\right[$.

Les deux conditions devant être réalisées simultanément, l'ensemble de définition de l'équation est donc $\left]-\sqrt{3};1\right[$. Pour tout $x\in \left]-\sqrt{3};1\right[$, par bijectivité de la fonction logarithme népérien,

$\ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=2\ln(1-x) \Leftrightarrow \ln\left(x^3-x^2-3x+3\right)=\ln\left[(1-x)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^3-x^2-3x+3=1-2x+x^2 \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0$

Cette dernière équation ayant pour solution –1 ; 1 et 2, par compatibilité avec l'ensemble de définition de l'équation, on obtient $\boxed{S_d=\{-1\}}$

Exercice n°8

1) Le système $\begin{cases} x-y=\dfrac{3}{2} \\ \ln x+\ln y=0 \end{cases}$ n'est défini que si et seulement si $x>0$ et $y>0$. On le résout par substitution :

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln x+\ln y=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln x+\ln\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ \ln\left[x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right]=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-\dfrac{3}{2} & L_1 \\ x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)=1 & L_2 \end{cases}$$

On résout l'équation $x^2-\dfrac{3}{2}x-1=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0$ en calculant son discriminant $\Delta=(-3)^2-4\times 2\times(-2)=9+16=25$ d'où l'existence de deux solutions réelles distinctes $x_1=\dfrac{-(-3)-\sqrt{25}}{2\times 2}=\dfrac{3-5}{4}=-\dfrac{1}{2}$ et $x_2=\dfrac{-(-3)+\sqrt{25}}{2\times 2}=\dfrac{3+5}{4}=2$. La seule valeur compatible avec l'ensemble de définition du système est $x=2$ donc $\begin{cases} y=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2} & L_1 \\ x=2 & L_2 \end{cases}$. Ainsi $\boxed{S=\left\{\left(2;\dfrac{1}{2}\right)\right\}}$

2) Le système $\begin{cases} 5\ln x+2\ln y=26 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{cases}$ n'est défini que si et seulement si $x>0$ et $y>0$

On effectue un changement de variable en posant $X=\ln x$ et $Y=\ln y$. Le système $\begin{cases} 5\ln x+2\ln y=26 \\ 2\ln x-3\ln y=-1 \end{cases}$ devient alors équivalent au système. $\begin{cases} 5X+2Y=26 & L_1 \\ 2X-3Y=-1 & L_2 \end{cases}$ Comme $5\times(-3)-2\times 2\neq 0$, ce système admet une unique solution

$$\begin{cases} 5X+2Y=26 & L_1 \\ 2X-3Y=-1 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15X+6Y=78 & 3L_1 \\ 4X-6Y=-2 & 2L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19X=76 & 3L_1-2L_2 \\ Y=\dfrac{2X+1}{3} & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X=\dfrac{76}{19}=4 & 3L_1-2L_2 \\ Y=\dfrac{2\times 4+1}{3}=3 & L_2 \end{cases} \boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} X=4 & 3L_1-2L_2 \\ Y=3 & L_2 \end{cases}}$$. Ainsi $S=\{(4;3)\}$

On « revient aux inconnues x et y » : $X=4 \Leftrightarrow \ln x=4 \Leftrightarrow x=e^4$ et $Y=3 \Leftrightarrow \ln y=3 \Leftrightarrow y=e^3$

Finalement $\boxed{S=\{(e^4;e^3)\}}$

3) Le système $\begin{cases} \ln xy=4 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases}$ n'est défini que si et seulement si $x>0$ et $y>0$

Puisque pour tout $x>0$ et $y>0$, $\ln xy=\ln x+\ln y$, le système devient équivalent à $\begin{cases} \ln x+\ln y=4 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases}$

On effectue un changement de variable en posant $X=\ln x$ et $Y=\ln y$.

Le système $\begin{cases} \ln x+\ln y=4 \\ (\ln x)(\ln y)=-12 \end{cases}$ devient alors équivalent au système. $\begin{cases} X+Y=4 & L_1 \\ XY=-12 & L_2 \end{cases}$

Par substitution, $\begin{cases} Y=4-X & L_1 \\ X(4-X)=-12 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y=4-X & L_1 \\ -X^2+4X+12=0 & L_2 \end{cases}$

On résout l'équation $-X^2+4X+12=0 \Leftrightarrow X^2-4X-12=0$ en calculant son discriminant $\Delta=(-4)^2-4\times 1\times(-12)=16+48=64$ d'où l'existence de deux solutions réelles distinctes $X_1=\dfrac{-(-4)-\sqrt{64}}{2\times 1}=\dfrac{-4}{2}=-2$ et $X_2=\dfrac{-(-4)+\sqrt{64}}{2}=\dfrac{12}{2}=6$.

A chaque valeur de X correspond une valeur de Y :

$X_1=-2 \Rightarrow Y_1=4-X_1=4-(-2)=6$ et $X_2=6 \Rightarrow Y_2=4-X_2=4-6=-2$

Les solutions du système $\begin{cases} X+Y=4 & L_1 \\ XY=-12 & L_2 \end{cases}$ sont $S=\{(6;-2);(-2;6)\}$ (Comme X et Y jouent des rôles symétriques, on peut considérer qu'il n'existe qu'une seule solution : 6 et –2)

On « revient aux inconnues x et y » :

$X=6 \Leftrightarrow \ln x=6 \Leftrightarrow x=e^6$ et $Y=-2 \Leftrightarrow \ln y=-2 \Leftrightarrow y=e^{-2}$,

ou symétriquement $X=-2 \Leftrightarrow \ln x=-2 \Leftrightarrow x=e^{-2}$ et $Y=6 \Leftrightarrow \ln y=6 \Leftrightarrow y=e^6$,

Finalement $\boxed{S=\{(e^6;e^{-2});(e^{-2};e^6)\}}$ ou de manière symétrique $\boxed{S=\{(e^6;e^{-2})\}}$

Exercice n°9

1) L'inéquation est définie si et seulement

$$\begin{cases} 2+5x>0 \\ x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{2}{5} \\ x>-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in \left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[\\ x\in \left]-6;+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow x\in \left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[\cap \left]-6;+\infty\right[= \left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[$$

Pour tout $x\in \left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[$, $\ln(2+5x)\le \ln(x+6) \Leftrightarrow 2+5x\le x+6 \Leftrightarrow 4x\le 4 \Leftrightarrow x\le 1$

L'ensemble des solutions est donc $S=\left]-\dfrac{2}{5};+\infty\right[\cap \left]-\infty;1\right] = \left]-\dfrac{2}{5};1\right]$

2) L'inéquation est définie si et seulement

$$\begin{cases} x-1>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x>3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in \left]1;+\infty\right[\\ x\in \left]3;+\infty\right[\end{cases} \Leftrightarrow x\in \left]1;+\infty\right[\cap \left]3;+\infty\right[= \left]3;+\infty\right[$$

Pour tout $x\in \left]3;+\infty\right[$,

$\ln(x-1)+\ln(x-3)<\ln(3) \Leftrightarrow \ln((x-1)(x-3))<\ln(3)$ (car $\ln(a)+\ln(b)=\ln(a\times b)$)

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)<3 \Leftrightarrow x^2-4x<0$

$\Leftrightarrow x(x-4)<0 \Leftrightarrow x\in]0;4[$

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{S=]0;4[\cap]3;+\infty[=]3;4[}$

3) L'inéquation est définie si et seulement $x\in]0;+\infty[$

$\ln x\geq 2 \Leftrightarrow \ln x\geq 2\times 1 \Leftrightarrow \ln x\geq 2\times \ln e$ (car $\ln(e)=1$)

$\Leftrightarrow \ln x\geq \ln\left(e^2\right)$ (car $n\ln(a)=\ln\left(a^n\right)$)

$\Leftrightarrow x\geq e^2$. $\boxed{S=\left[e^2;+\infty\right[}$

4) L'inéquation est définie si et seulement $x\in]0;+\infty[$ .Puisque x>0,

$\frac{2(1+\ln x)}{x}>0 \Leftrightarrow 1+\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1}=\frac{1}{e}$. $\boxed{S=\left]\frac{1}{e};+\infty\right[}$

5) L'inéquation est définie si et seulement $x\in]0;+\infty[$.

En posant $X=\ln x$, l'inéquation devient équivalente à l'inéquation du second degré $X^2+X-6\leq 0$, que l'on sait résoudre : $X\in[-3;2]$ En revenant à la variable x on a : $X\in[-3;2] \Leftrightarrow -3\leq \ln(x)\leq 2 \Leftrightarrow e^{-3}\leq x\leq e^2$. $S=\left[e^{-3};e^2\right]$

6) L'inéquation est définie si et seulement $2x-5>0 \Leftrightarrow x\in \left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$\ln(2x-5)\geq 1 \Leftrightarrow \ln(2x-5)\geq \ln(e) \Leftrightarrow 2x-5\geq e \Leftrightarrow x\geq \frac{e+5}{2}$

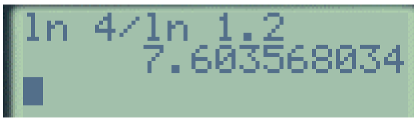
$S=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[\cap\left]\frac{e+5}{2};+\infty\right[=\boxed{\left]\frac{e+5}{2};+\infty\right[}$,

7) L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

$(1,2)^n\geq 4 \Leftrightarrow \ln\left(1,2^n\right)\geq \ln(4)$

$\Leftrightarrow n\ln(1,2)\geq \ln(4)$ car $\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$

$\Leftrightarrow n\geq \frac{\ln(4)}{\ln(1,2)}$ car $\ln(1,2)>0$



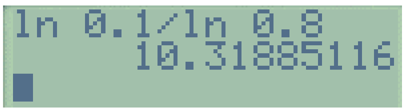
Si $n\in\mathbb{N}$, alors $\boxed{n\geq 8}$

8) L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}$.

$(0,8)^n\leq 0,1 \Leftrightarrow \ln\left(0,8^n\right)\geq \ln(0,1)$

$\Leftrightarrow n\ln(0,8)\leq \ln(0,1)$ car $\ln\left(a^n\right)=n\ln(a)$

$\Leftrightarrow n\geq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,8)}$ car $\ln(0,8)<0$



Si $n\in\mathbb{N}$, alors $\boxed{n\geq 11}$

<u>Exercice n°10</u>

Le capital acquis au bout de n années s'élevant à $5000\times\left(1+\frac{6}{100}\right)^n=5000\times 1,06^n$, il suffit de résoudre l'inéquation

$5000\times 1,06^n\geq 12000 \Leftrightarrow 1,06^n\geq \frac{12000}{5000} \Leftrightarrow 1,06^n\geq 2,4$

$\Leftrightarrow \ln\left(1,06^n\right)\geq \ln(2,4) \Leftrightarrow n\underbrace{\ln(1,06)}_{\geq 0}\geq \ln(2,4) \Leftrightarrow n\geq \frac{\ln(2,4)}{\ln(1,06)}\approx 15,02$

Puisque $n\in\mathbb{N}$, c'est au cours de la 15ème année (donc au début de la 16ème année) que le capital dépassera 12000 €

Exercice n°11

1) Etudions séparément les signes de $\ln x$ et $\ln x+1$, puis résumons dans un tableau de signes

Pour $x\in \left]0;+\infty\right[$,

$\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$ et $\ln x>0 \Leftrightarrow x\in \left]1;+\infty\right[$

De plus $\ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ et $\ln x+1>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1}=\dfrac{1}{e}$ $\ln x>0 \Leftrightarrow x\in \left]1;+\infty\right[$

D'où le tableau de $A(x)=\ln x(\ln x+1)$:

x	0		$e^{-1}=\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	|	$-$	0	$+$	
$\ln x+1$	‖	$-$	0	$+$	|	$+$	
$A(x)=\ln x(\ln x+1)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

2) Etudions séparément les signes de $2x$ et $\ln(1-x)$, puis résumons dans un tableau de signes

Notons d'abord que l'expression n'est définie que si et seulement si $1-x>0 \Leftrightarrow x<1 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;1\right[$

Pour $x\in \left]-\infty;1\right[$,

$2x=0 \Leftrightarrow x=0$ et $2x>0 \Leftrightarrow x>0$

De plus $\ln(1-x)=0 \Leftrightarrow 1-x=1 \Leftrightarrow x=0$ et $\ln(1-x)>0 \Leftrightarrow 1-x>1 \Leftrightarrow x<0$

D'où le tableau de $B(x)=2x\ln(1-x)$:

x	$-\infty$		0		1
$2x$		$-$	0	$+$	‖
$\ln(1-x)$		$+$	0	$-$	‖
$B(x)=2x\ln(1-x)$		$-$	0	$-$	‖

3) Etudions séparément les signes de $-x^2$ et $\ln(x+1)$, puis résumons dans un tableau de signes

Notons d'abord que l'expression n'est définie que si et seulement si $x+1>0 \Leftrightarrow x>-1 \Leftrightarrow x\in \left]-1;+\infty\right[$

Pour tout $x\in \left]-1;+\infty\right[$, $-x^2\leq 0$ et $-x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

De plus $\ln(x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=1 \Leftrightarrow x=0$ et $\ln(x+1)>0 \Leftrightarrow x+1>1 \Leftrightarrow x>0$

D'où le tableau de $C(x)=-x^2\ln(x+1)$:

x	-1		0		$+\infty$
$-x^2$	‖	$-$	0	$-$	
$\ln(x+1)$	‖	$-$	0	$+$	
$C(x)=-x^2\ln(x+1)$	‖	$+$	0	$-$	

Exercice n°12

1) La fonction f sera définie pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $x^2+3x-4>0$

Si on note $P(x)=x^2+3x-4$, on calcule son discriminant : $\Delta=3^2-4\times1\times(-4)=25$, d'où l'existence de deux racines réelles distinctes $x_1=\dfrac{-3-\sqrt{25}}{2\times1}=-4$ et $x_2=\dfrac{-3+\sqrt{25}}{2\times1}=1$. D'après les règles de signe d'un trinôme, $x^2+3x-4>0$ si et seumement si $x\in\,]-\infty;-4[\,\cup\,]1;+\infty[$. Ainsi $\boxed{D_f=\,]-\infty;-4[\,\cup\,]1;+\infty[}$

2) La fonction f définie par $f(x)=\ln\left(\dfrac{4-x^2}{x}\right)=\ln\left(\dfrac{(2-x)(2+x)}{x}\right)$ existe pour toutes les valeurs de x pour lesquelles $\dfrac{(2-x)(2+x)}{x}>0$ (avec $x\neq0$)

On dresse le tableau de signes de l'expression $A(x)=\dfrac{(2-x)(2+x)}{x}$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-x$		$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$2+x$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$A(x)=\dfrac{(2-x)(2+x)}{x}$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Ainsi $\dfrac{(2-x)(2+x)}{x}>0\Leftrightarrow\,]-\infty;-2[\,\cup\,]0;2[$

On conclut $\boxed{D_f=\,]-\infty;-2[\,\cup\,]0;2[}$

3) La fonction f définie par $f:x\rightarrow\ln\left(4-x^2\right)-\ln x$ existe pour toutes les valeurs de x pour lesquelles on a **simultanément** $4-x^2>0$ et $x>0$ (pour que les deux membres de la fonction soient bien définis)

Or $4-x^2>0\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow x\in\,]-2;2[$.

Si on exige de plus que $x>0$, alors $\boxed{D_f=\,]-2;2[\,\cap\,]0;+\infty[\,=\,]0;2[}$

4) La fonction f définie par $f:x\rightarrow\ln\left(x^2-4\right)-\ln(-x)$ existe pour toutes les valeurs de x pour lesquelles on a **simultanément** $x^2-4>0$ et $-x>0\Leftrightarrow x<0$ (pour que les deux membres de la fonction soient bien définis)

Or $x^2-4>0\Leftrightarrow x^2>4\Leftrightarrow x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]2;+\infty[$.

Si on exige de plus que $x<0$, alors $\boxed{D_f=\left(]-\infty;-2[\,\cup\,]2;+\infty[\right)\cap\,]-\infty;0[\,=\,]-\infty;-2[}$

Exercice n°13

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+\ln x\right)=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}1-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, donc par produite, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)\ln x=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ donc par soustraction, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln2-3\ln x)=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to0}x-4=-4$ et $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to0}(x-4+\ln x)=-\infty$

5) Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, on pose $u=x^2$, et puisque $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ on conclut que $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x^2\right)=+\infty$

6) $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0}x=0^+$ on conclut par quotient que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$

7) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\infty-\infty$ ». On transforme l'écriture : $x-\ln x = x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ (limite connue), on déduit successivement que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1$, puis par produit, que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x=+\infty$

8) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln(1)=0$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée « $\infty\times 0$ ». En posant $X=\frac{1}{x}$, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} X=0^+$, la limite cherchée devient $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{1}{X}\ln\left(1+X\right)$. Or un résultat du cours nous indique que $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{\ln\left(1+X\right)}{X}=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$

9) En posant $X=2x$, la limite cherchée devient $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+X)}{X}$. Et puisque $\lim\limits_{X\to 0^+}\frac{\ln\left(1+X\right)}{X}=1$, on conclut que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+X)}{X}=2$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=2$

Exercice n°14

1) La fonction définie par $f(x)=-\frac{x}{2}+1+2\ln x$ et définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f'(x)=-\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}+\frac{2}{x}\boxed{=\frac{4-x}{2x}}$

2) La fonction définie par $f(x)=\frac{2\ln x}{\ln 3}$ est définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et puisque pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f(x)=\frac{2}{\ln 3}\ln x$, $f'(x)=\frac{2}{\ln 3}\times\frac{1}{x}\boxed{=\frac{2}{x\ln 3}}$

3) La fonction définie par $f(x)=\ln(4-x)+\ln x$ est définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[\cap\left]-\infty;4\right[=\left]0;4\right[$ et pour tout $x\in\left]0;4\right[$, $f'(x)=\frac{-1}{4-x}+\frac{1}{x}=\frac{-x+4-x}{x\left(4-x\right)}=\frac{4-2x}{x\left(4-x\right)}\boxed{=\frac{2\left(2-x\right)}{x\left(4-x\right)}}$

4) La fonction définie par $f(x)=x\ln x-x$ est définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $x\ln x=u\left(x\right)v\left(x\right)$ où $u\left(x\right)=x\Rightarrow u'\left(x\right)=1$ et $v\left(x\right)=\ln x\Rightarrow v'\left(x\right)=\frac{1}{x}$, on aura $f'(x)=u'\left(x\right)v\left(x\right)+u\left(x\right)v'\left(x\right)-1=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1\boxed{=\ln x}$

5) La fonction définie par $f(x)=x^2\ln x$ est définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x\in\left]0;+\infty\right[$, $f\left(x\right)=u\left(x\right)v\left(x\right)$ où $u\left(x\right)=x^2\Rightarrow u'\left(x\right)=2x$ et $v\left(x\right)=\ln x\Rightarrow v'\left(x\right)=\frac{1}{x}$, on aura $f'(x)=u'\left(x\right)v\left(x\right)+u\left(x\right)v'\left(x\right)=2x\times\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\boxed{=x\left(2\ln x+1\right)}$

6) La fonction définie par $f(x)=\ln(2x-5)$ est définie et dérivable sur $\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$ (car $X\to\ln X$ est définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et $2x-5>0\Leftrightarrow x\in\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$). Puisque pour tout $x\in\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$, $f(x)=\ln\left(u\left(x\right)\right)$ avec $u\left(x\right)=2x-5\Rightarrow u'\left(x\right)=2$, on aura $\boxed{f'(x)=\frac{u'\left(x\right)}{u\left(x\right)}=\frac{2}{2x-5}}$

7) La fonction définie par $f(x)=\ln(-3x+1)$ est définie et dérivable sur $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$ (car $X \to \ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $-3x+1>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$). Puisque pour tout $x\in \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$, $f(x)=\ln\left(u(x)\right)$ avec $u(x)=-3x+1 \Rightarrow u'(x)=-3$, on aura $\boxed{f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{-3}{-3x+1}}$

8) La fonction définie par $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ n'est définie que pourles valeurs de x pour lesquelles $x^2+x+1>0$. Si on note $P(x)=x^2+x+1$, le calcul de son discriminant fournit $\Delta=1^2-4\times1\times1=-3<0$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+x+1>0$, donc f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(u(x)\right)$ avec $u(x)=x^2+x+1 \Rightarrow u'(x)=2x+1$. Ainsi $\boxed{f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{2x+1}{x^2+x+1}}$

9) La fonction définie par $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ n'est définie que pourles valeurs de x pour lesquelles $\frac{x-1}{x+1}>0$. Si on note $P(x)=\frac{x-1}{x+1}$, le tableau de signes de P est donné par :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)=\frac{x-1}{x+1}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Ainsi, f est définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

Puisque P est dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, puisque pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $\frac{x-1}{x+1}>0$ et puisque $X \to \ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, on conclut que f sera dérivable sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

Pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, puisque $f(x)=\ln\left(P(x)\right)$, on aura $f'(x)=\frac{P'(x)}{P(x)}$. Puisque $P(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=x-1 \Rightarrow u'(x)=1$ et $v(x)=x+1 \Rightarrow v'(x)=1$, on aura $P'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}=\frac{1\times(x+1)-(x-1)\times1}{(x+1)^2}$

$=\frac{2}{(x+1)^2}$ donc $f'(x)=\frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x-1}\boxed{=\frac{2}{(x+1)(x-1)}}$

10) La fonction définie par $f(x)=\ln(\ln x)$ n'est définie que pourles valeurs de x pour lesquelles $\ln x>0$, c'est-à-dire $D_f=]1;+\infty[$. Pour tout $x\in]1;+\infty[$, puisque $f(x)=\ln\left(u(x)\right)$ où $u(x)=\ln x \Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$ on aura $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\boxed{=\frac{1}{x\ln x}}$

11) La fonction définie par $f(x)=x\ln(2x-3)$ est définie et dérivable sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$ en tant que produit de fonctions qui le sont (car $X \to \ln X$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et $2x-3>0 \Leftrightarrow x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$)

Puisque pour tout $x\in\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$, $f(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=x \Rightarrow u'(x)=1$ et $v(x)=\ln(2x-3) \Rightarrow v'(x)=\frac{2}{2x-3}$, on en déduit $f(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=1\times\ln(2x-3)+x\times\frac{2}{2x-3}=\ln(2x-3)+\frac{2x}{2x-3}\boxed{=\frac{(2x-3)\ln(2x-3)+2x}{2x-3}}$

12) La fonction définie par $f(x)=2x(1-\ln x)$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=u(x)v(x)$ avec $u(x)=2x \Rightarrow u'(x)=2$ et $v(x)=1-\ln x \Rightarrow v'(x)=-\dfrac{1}{x}$, on en déduit $f(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=2\times(1-\ln x)+2x\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)=2-2\ln x-2\boxed{=-2\ln x}$

13) La fonction définie par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=\ln x \Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x \Rightarrow v'(x)=1$, on aura

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\times x-(\ln x)\times 1}{\left(v(x)\right)^2}\boxed{=\frac{1-\ln x}{x^2}}$$

14) La fonction définie par $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x^2}$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont. Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=x-\ln x \Rightarrow u'(x)=1-\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=x^2 \Rightarrow v'(x)=2x$

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}=\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\times x^2-(x-\ln x)\times 2x}{\left(x^2\right)^2}=\frac{x^2-x-2x^2+2x\ln x}{x^4}=\frac{-x^2-x+2x\ln x}{x^4}\boxed{=\frac{2\ln x-x-1}{x^3}}$$

15) La fonction définie par $f(x)=(\ln x)^2-2\ln x-4$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et composée de fonctions qui le sont. Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=2(\ln x)^{2-1}\times\dfrac{1}{x}-2\times\dfrac{1}{x}=\dfrac{2\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}\boxed{=\dfrac{2(\ln x-1)}{x}}$

16) La fonction définie par $f(x)=\ln x^2$ est définie et dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. En effet $x\to x^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, tandis que $X\to\ln(X)$ n'est définie et dérivable que sur $]0;+\infty[$. Or $x^2\in]0;+\infty[\Leftrightarrow x\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. Pour tout $x\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2}=\boxed{\dfrac{2}{x}}$

17) La fonction définie par $f(x)=(\ln x)^2$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que composée de fonctions qui le sont. En effet $x\to\ln x$ est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, tandis que $X\to X^2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=2(\ln x)^{2-1}\times\dfrac{1}{x}\boxed{=\dfrac{2\ln x}{x}}$

18) La fonction définie par $f(x)=\ln\left|1-x^2\right|$ est définie et dérivable pour toutes les valeurs de x telles que $1-x^2\neq 0\Leftrightarrow x\in]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$. Selon la valeur de x, l'expression de $f(x)$ n'est pas la même.

Pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $1-x^2<0$ donc $\left|1-x^2\right|=x^2-1$ et par suite $f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$. Alors $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$

Pour tout $x\in]-1;1[$, $1-x^2>0$ donc $\left|1-x^2\right|=1-x^2$ et par suite $f(x)=\ln\left(1-x^2\right)$. Alors $f'(x)=\dfrac{-2x}{1-x^2}=\dfrac{2x}{x^2-1}$

Ainsi, on peut affirmer que pour tout $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $\boxed{f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}}$

<u>Exercice n°15</u>

1) $f(2)=0$ se traduit par l'équation $\ln(2a+b)=0\Leftrightarrow 2a+b=1$

De plus $f'(x)=\dfrac{a}{ax+b}$ donc $f'(3)=\dfrac{3}{4}$ se traduit par $\dfrac{a}{3a+b}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 4a=3(3a+b)\Leftrightarrow 5a+3b=0$

On doit résoudre le système $\begin{cases}2a+b=1 & L_1\\ 5a+3b=0 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6a+3b=3 & 3L_1\\ 5a+3b=0 & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3 & 3L_1-L_1\\ b=\dfrac{-5a}{3} & L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3 & 3L_1-L_1\\ b=-5 & L_2\end{cases}$

Ainsi, $\boxed{f(x)=\ln(3x-5)}$, qui est définie si et seulement si $3x-5>0 \Leftrightarrow x\in \left]\frac{5}{3};+\infty\right[$. Ainsi $\boxed{D_f = \left]\frac{5}{3};+\infty\right[}$

La fonction *f* est la composée de deux fonctions strictement croissantes donc est strictement croissante sur $\left]\frac{5}{3};+\infty\right[$

2) La courbe *C* passe par le point A(2 ;0) implique $f(2)=0 \Leftrightarrow \ln(2a+b)=0 \Leftrightarrow 2a+b=1$. La tangente en A ait pour coefficient directeur –2 implique $f'(2)=-2$, c'est-à-dire $\frac{a}{2a+b}=-2 \Leftrightarrow a=-2(2a+b) \Leftrightarrow 5a+2b=0$. On doit résoudre : $\begin{cases} 2a+b=1 & L_1 \\ 5a+2b=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b=2 & 2L_1 \\ 5a+2b=0 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a=2 & 2L_1-L_1 \\ b=\frac{-5a}{2} & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 & 2L_1-L_1 \\ b=5 & L_2 \end{cases}$

Ainsi, $\boxed{f(x)=\ln(-2x+5)}$

<u>Exercice n°16</u>

Partie I

1) *g* est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$,

$$g'(x)=2x-2\times\frac{1}{x}=\frac{2x^2-2}{x}=\frac{2(x^2-1)}{x}=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

Puisque *x*>0, le signe de $g'(x)$ sera donné par le signe de $(x-1)(x+1)$, expression dont les racines sont –1 et 1

Ainsi, pour $x\in]0;1[$, $g'(x)<0$ donc *g* est strictement décroissante sur]0 ;1[, et pour tout $x\in]1;+\infty[$, $g'(x)>0$ donc *g* est strictement croissante sur $]1;+\infty[$

2) Sur $]0;+\infty[$, *g* atteint donc son minimum lorsque *x* = 1, et comme $g(1)=1^2-2\times\underbrace{\ln 1}_{0}=1$, on peut affirmer que $\boxed{\text{pour tout } x\in]0;+\infty[,\ g(x)>0}$

Partie II

1) Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty$, on en déduit par quotient et somme, que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty}$. La droite d'équation *x* = 0 (c'est-à-dire l'axe des ordonnées) est donc asymptote verticale à la courbe (C)

2) On transforme l'écriture de *f*(*x*) : Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$

En utilisant la limite de croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2}=+\infty$, on déduit par somme que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$. De plus, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)-\frac{x}{2}=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, on aura donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{x}{2}\right)=0}$. $\boxed{\text{La droite } (\Delta) \text{ d'équation } y=\frac{x}{2} \text{ est asymptote oblique à (C) en } +\infty}$.

Pour connaître la position relative de (C) et (Δ), on étudie le signe de la différence $f(x)-\frac{x}{2}=\frac{1+\ln x}{x}$. Or

$f(x)-\frac{x}{2}=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}=e^{-1}$ et $f(x)-\frac{x}{2}>0 \Leftrightarrow 1+\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}=e^{-1}$

Ainsi (C) et (Δ) sont sécantes au point A d'abscisse $\frac{1}{e}=e^{-1}$ et d'ordonnée $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e}$

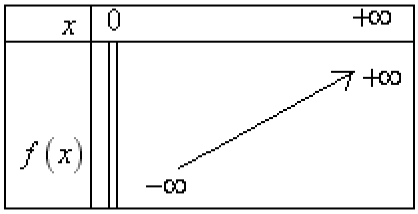
De plus, sur $\left]0;\frac{1}{e}\right[$, (C) est en dessous de (Δ), et sur $\left]0;\frac{1}{e}\right[$, (C) est au dessus de (Δ).

3) *f* est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}\times x-(1+\ln x)\times 1}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{\ln x}{x^2}=\frac{1}{2x^2}\left(x^2-2\ln x\right)=\frac{1}{2x^2}g(x)$$

Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\frac{1}{2x^2}>0$ et $g'(x)>0$ (question 2 de la partie 1), on conclut que pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)>0$, donc que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$

Le tableau de variations de *f* est donc :



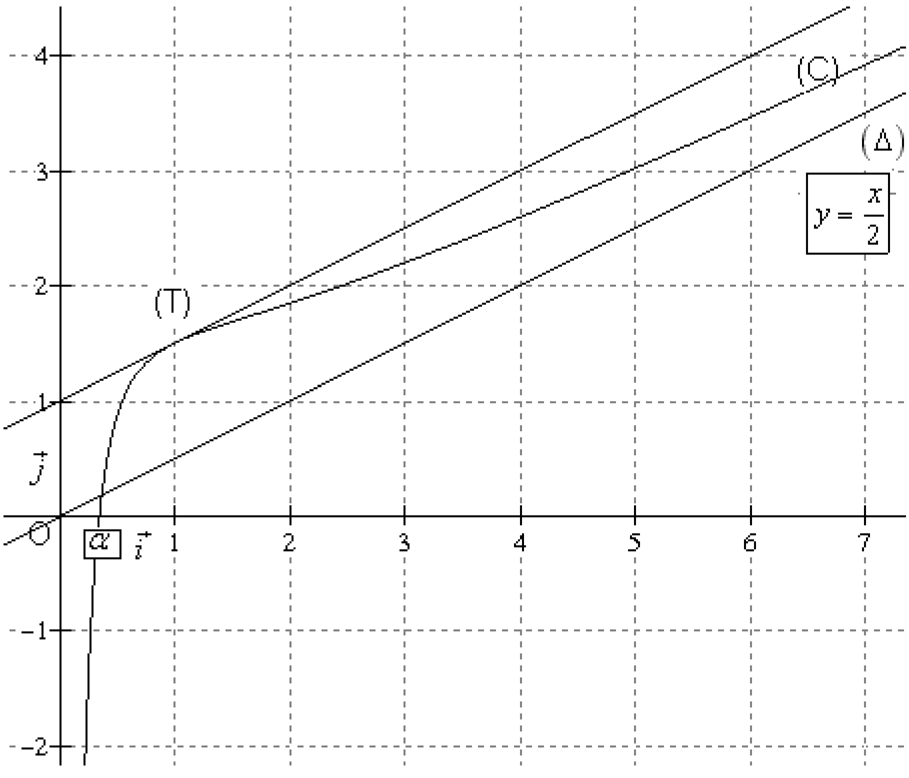
4) La droite (Δ) a un coefficient directeur égal à $\frac{1}{2}$

Le coefficient directeur de la tangente (T) en un point d'abscisse *a* est égal à $f'(a)=\frac{1}{2}-\frac{\ln a}{a^2}$

La tangente (T) sera parallèle à (Δ) si et seulement si ces deux droites ont même coefficient directeur, donc si et seulement si $f'(a)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\ln a}{a^2}=0\Leftrightarrow\ln a=0\Leftrightarrow a=1$. $\boxed{\text{C'est donc au point B d'abscisse 1 et d'ordonnée } f(1)=\frac{3}{2} \text{ que la tangente (T) sera parallèle à } (\Delta)}$

5) Sur $]0;+\infty[$, *f* est continue en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont. De plus elle est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Enfin, puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, on a $0\in\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$. Le **théorème de la valeur intermédiaire** affirme donc l'existence d'une valeur α telle que $f(\alpha)=0$. Par définition, $f(\alpha)=0\Leftrightarrow\frac{\alpha}{2}+\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}=0\Leftrightarrow\boxed{\ln\alpha=-\frac{\alpha^2}{2}-1}$. Le coefficient directeur de la tangente à (C) au point d'abscisse α est égal à : $f'(\alpha)=\frac{1}{2}-\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}=\frac{1}{2}-\frac{\left(-\frac{\alpha^2}{2}-1\right)}{\alpha^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha^2}=1+\frac{1}{\alpha^2}>1$. Ce coefficient est donc supérieur à 1

6)



Exercice n°17

Partie I

1) f est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x}=1+\frac{1}{2x}$. Mais comme $x\in]0;+\infty[$, on aura $1+\frac{1}{2x}>0 \Leftrightarrow f'(x)>0$. $\boxed{f \text{ est donc strictemet croissante sur }]0;+\infty[}$. De plus $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \ln x=-\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty}$.

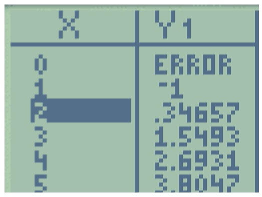
Enfin, pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f(x)=x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{2}\times\frac{\ln x}{x}\right)$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on conclut, par différence et produits que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

Le tableau de variations de f est donc :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$\|$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2) Sur l'intervalle $]0;+\infty[$, f est continue et strictement croissante. De plus $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Comme $0\in\left]\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$, le **théorème de la valeur intermédiaire** affirme l'existence d'une unique solution l à l'équation $f(x)=0$. Grâce à la calculatrice, on peut dresser un tableau de valeurs de f sur $]0;+\infty[$. Puisque $f(1)<0$ et $f(2)>0$, on peut affirmer que $\boxed{l\in]1;2[}$, donc $\boxed{n=1}$



3) Puisque f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, pour tout $x\in]0;l[$, $f(x)<f(l)$, c'est-à-dire $f(x)<0$, et pour tout $x\in]l;+\infty[$, $f(x)>f(l)$, c'est-à-dire $f(x)>0$,

Partie II

1) On utilise la limite de croissance comparée $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2\ln x=0$ pour conclure, par somme, que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} g(x)=0=g(0)}$, donc que $\boxed{g \text{ est continue en } 0.}$ Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g(x)=x^2\left(-\frac{7}{8}+\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\ln x\right)$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{7}{8}+\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\ln x=-\infty$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, on conclut par produit que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty}$

2) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que somme et produits de fonctions qui le sont, et pour tout $x>0$, $g'(x)=-\frac{7}{8}\times2x+1-\frac{1}{4}\left(u'(x)v(x)+u(x)v'(x)\right)$ où $u(x)=x^2\Rightarrow u'(x)=2x$ et $v(x)=\ln x\Rightarrow v'(x)=\frac{1}{x}$.

Ainsi $g'(x)=-\frac{7}{4}x+1-\frac{1}{4}\left(2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\right)=-\frac{7}{4}x+1-\frac{x\ln x}{2}-\frac{1}{4}x=-2x+1-\frac{1}{2}x\ln x$

On calcule par ailleurs $xf\left(\frac{1}{x}\right)=x\left(\frac{1}{x}-2+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)=x\left(\frac{1}{x}-2-\frac{1}{2}\ln(x)\right)=1-2x-\frac{1}{2}x\ln x$

On a bien l'égalité $\boxed{g'(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)}$

3) On calcule $g\left(\frac{1}{l}\right)=-\frac{7}{8}\left(\frac{1}{l}\right)^2+\frac{1}{l}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{l}\right)^2\ln\frac{1}{l}=-\frac{7}{8l^2}+\frac{1}{l}+\frac{1}{4l^2}\ln l$

Or par définition $f(l)=0 \Leftrightarrow l-2+\frac{1}{2}\ln l=0 \Leftrightarrow \ln l=2(2-l)$. On remplace donc dans le calcul de $g\left(\frac{1}{l}\right)$:

$$g\left(\frac{1}{l}\right)=-\frac{7}{8l^2}+\frac{1}{l}+\frac{1}{4l^2}\left(2(2-l)\right)=-\frac{7}{8l^2}+\frac{1}{l}+\frac{4-2l}{4l^2}=\frac{-7+8l+2(4-2l)}{8l^2}\boxed{=\frac{1+4l}{8l^2}}$$, d'où l'égalité demandée.

Pour tout $x>0$, $g'(x)$ aura le même signe que $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Ainsi :

Si $x\in\left]0;\frac{1}{l}\right[$, on aura $\frac{1}{x}>l$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right)>0$ et par suite $g'(x)>0$.
Si $x\in\left]\frac{1}{l};+\infty\right[$, on aura $\frac{1}{x}<l$ donc $f\left(\frac{1}{x}\right)<0$ et par suite $g'(x)<0$. Enfin $g'\left(\frac{1}{l}\right)=\frac{1}{l}f(l)=0$

$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc strictement croissante sur } \left]0;\frac{1}{l}\right[\text{ et strictement décroissante sur } \left]\frac{1}{l};+\infty\right[}$

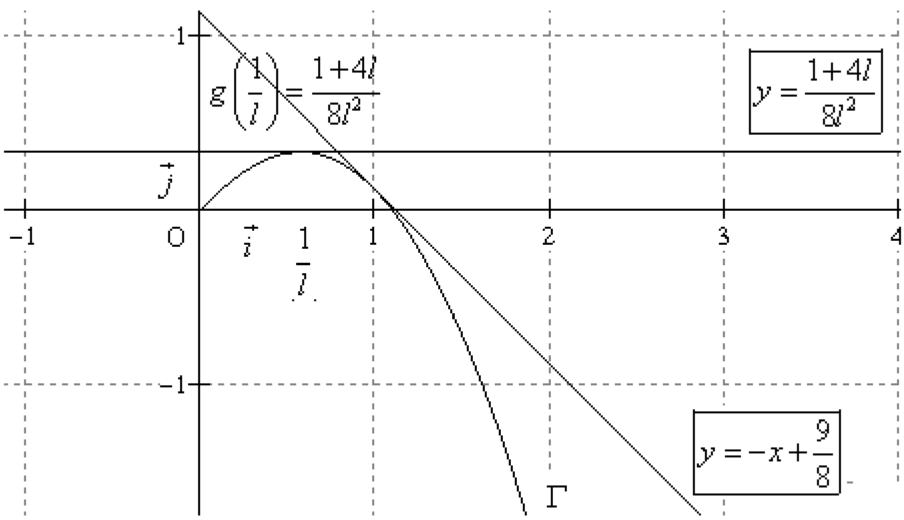
Son tableau de variations est donc :

x	0		$\frac{1}{l}$		$+\infty$
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\frac{1}{l}\right)=\frac{1+4l}{8l^2}$	$\searrow$	$-\infty$

4) Une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de *g* au point d'abscisse 1 est $y=g'(1)(x-1)+g(1)$. Or $g'(1)=1\times f\left(\frac{1}{1}\right)=f(1)=-1$ et $g(1)=\frac{1}{8}$. Ainsi une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de *g* au point d'abscisse 1 est $\boxed{y=-(x-1)+\frac{1}{8}=-x+\frac{9}{8}}$. Une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de *g* au point d'abscisse *l* est $y=g'(l)(x-l)+g(l)$. Or $g'(l)=0$ et $g\left(\frac{1}{l}\right)=\frac{1+4l}{8l^2}$. Ainsi une équation de la tangente à la courbe Γ représentative de *g* au point d'abscisse *l* est $\boxed{y=\frac{1+4l}{8l^2}}$

En reprenant l'écriture $g'(x)=-2x+1-\frac{1}{2}x\ln x$, et en utilisant la limite de croissance comparée $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x=0$, on conclut par somme que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g'(x)=1}$. Graphiquement, cela signifie que Γ admet en O une demi tangente parallèle à la première bissectrice.

5)



Exercice n°18

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que somme de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\boxed{F(x)=\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}+\ln(|x|)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+\ln(x)}$ puisque $x\in]0;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, puisque $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}=x+1+\frac{1}{x}$,

$\boxed{F(x)=\frac{x^2}{2}+x+\ln(|x|)=\frac{x^2}{2}+x+\ln(x)}$ puisque $x\in]0;+\infty[$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$. f est continue sur $]0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, donc admet des primitives sur $]0;+\infty[$, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $\boxed{F(x)=7\ln(|x|)+5\times 2\sqrt{x}-\frac{1}{x}=7\ln(x)+10\sqrt{x}-\frac{1}{x}}$,car $x\in]0;+\infty[$

4) $f(x)=\frac{3}{3x-4}$. f est continue sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$, et puisque $f(x)=\frac{3}{3x-4}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=3x-4\Rightarrow u'(x)=3$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|3x-4|)=\ln(3x-4)}$ car $x\in\left]\frac{4}{3};+\infty\right[$

5) $f(x)=\frac{1}{x+1}$. f est continue sur $]-1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]-1;+\infty[$, et puisque $f(x)=\frac{1}{x+1}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ où $u(x)=x+1\Rightarrow u'(x)=1$,

$\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|x+1|)=\ln(x+1)}$ car $x\in]-1;+\infty[$

6) Si $x\in]-\infty;-1[$, $\boxed{F(x)=\ln(|x+1|)=\ln(-(x+1))=\ln(-x-1)}$

7) $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$. f est continue sur $]2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]2;+\infty[$, et puisque $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}=\frac{u'(x)}{u(x)}$

où $u(x)=x^2-4\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\ln(|u(x)|)=\ln(|x^2-4|)=\ln(x^2-4)}$ car $x\in]2;+\infty[$

8) $f(x)=\frac{1}{3x-5}$ sur $[2;+\infty[$. f est continue sur $[2;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[2;+\infty[$, et pour tout $x\in[2;+\infty[$, puisque $f(x)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{3x-5}=\frac{1}{3}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=3x-5\Rightarrow u'(x)=3$, $\boxed{F(x)=\frac{1}{3}\ln(|3x-5|)=\frac{1}{3}\ln(3x-5)}$ car $x\in[2;+\infty[$

9) $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$ sur $\mathbb{R}$. f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, (le discriminant du trinôme x^2+2x+2 est strictement négatif) donc admet des primitives sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$, puisque $f(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=x^2+2x+2\Rightarrow u'(x)=2x+2$,

$\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\ln(|u(x)|)=\frac{1}{2}\ln(|x^2+2x+2|)=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)}$, puisque $x\in\mathbb{R}\Rightarrow x^2+2x+2>0$

10) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ sur $]-1;1[$. f est continue sur $]-1;1[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]-1;1[$, et pour tout $x\in]-1;1[$, puisque $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, où $u(x)=x^2-1\Rightarrow u'(x)=2x$, $\boxed{F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(\left|x^2-1\right|\right)=\dfrac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)}$ puisque $x\in]-1;1[\Rightarrow 1-x^2<0$

Exercice n°19

1) Pour tout $x\in[4;+\infty[$, $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=\dfrac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2}=\dfrac{ax^2+(b-2a)x-2b+c}{x-2}$

Ainsi $ax+b+\dfrac{c}{x-2}=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b-2a=-3\\-2b+c=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3+4=1\\c=-4+2=-2\end{cases}$. Pour tout $x\in[4;+\infty[$, $\boxed{f(x)=2x+1+\dfrac{-2}{x-2}}$

2) f est définie et continue sur $[4;+\infty[$ en tant que somme et quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[4;+\infty[$ A partir de l'écriture $f(x)=2x+1+\dfrac{-2}{x-2}$, on déduit l'expression d'une primitive F de f sur $[4;+\infty[$: $\boxed{F(x)=x^2+x-2\ln\left(\left|x-2\right|\right)=x^2+x-2\ln(x-2)}$ car $x\in[4;+\infty[\Rightarrow x-2>0$

Exercice n°20

1) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}$. f est définie et continue sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, et pour tout $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, puisque $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\sin x\Rightarrow u'(x)=\cos x$, $\boxed{F(x)=\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\ln\left(\left|\sin x\right|\right)=\ln(\sin x)}$, puisque $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[\Rightarrow\sin x>0$.

2) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. f est définie et continue sur $[1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $[1;+\infty[$, et pour tout $x\in[1;+\infty[$, puisque $f(x)=\dfrac{1}{x}\times\ln x=u'(x)\times u(x)$, ou $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\boxed{F(x)=\dfrac{(u(x))^2}{2}=\dfrac{(\ln(x))^2}{2}}$

3) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$. f définie est continue sur $]1;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $]1;+\infty[$, et pour tout $x\in]1;+\infty[$, puisque $f(x)=\dfrac{1/x}{\ln x}=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $\boxed{F(x)=\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\ln\left(\left|\ln(x)\right|\right)=\ln(\ln(x))}$ car $x\in]1;+\infty[\Rightarrow\ln x>0$

4) $f(x)=\tan x$. f définie est continue sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ en tant que quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas, donc admet des primitives sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, et pour tout $x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$, puisque $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{-u'(x)}{u(x)}$, ou $u(x)=\cos x\Rightarrow u'(x)=-\sin x$, $\boxed{F(x)=-\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=-\ln\left(\left|\cos x\right|\right)=-\ln(-\cos x)}$, puisque $x\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]\Rightarrow\cos x<0$.

Exercice n°21

1) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = F(2)-F(0)$ où F est une primitive de $f(x)=\frac{1}{x+1}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ donc $F(x)=\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=\ln\left(\left|x+1\right|\right)$.

Comme pour tout $x\in[0;2]$, $x+1>0$, on aura $F(x)=\ln(x+1)$ donc $\int_0^2 \frac{dx}{x+1}=\ln(3)-\ln(0+1)=\ln 3$

2) $\int_{-4}^{-3}\frac{3}{x+2}dx = F(-3)-F(-4)$ où F est une primitive de $f(x)=\frac{3}{x+2}=\frac{3u'(x)}{u(x)}$ donc $F(x)=3\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=3\ln\left(\left|x+2\right|\right)$. Comme pour tout $x\in[-4;-3]$, $x+2<0$, on aura $F(x)=3\ln\left(-(x+2)\right)=3\ln(-x-2)$ donc $\int_{-4}^{-3}\frac{3}{x+2}dx=3\ln\left(-(-3)-2\right)-3\ln\left(-(-4)-2\right)=3\ln 1-3\ln(2)=-3\ln 2$

3) $\int_{-2}^{0}\frac{4}{1-5x}dx=F(0)-F(2)$ où F est une primitive de $f(x)=\frac{4}{1-5x}=-\frac{4}{5}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ donc $F(x)=-\frac{4}{5}\times\ln\left(\left|u(x)\right|\right)=-\frac{4}{5}\times\ln\left(\left|1-5x\right|\right)$. Comme pour tout $x\in[-2;0]$, $1-5x>0$, on aura $F(x)=-\frac{4}{5}\times\ln(1-5x)$ donc $\int_{-2}^{0}\frac{4}{1-5x}dx=-\frac{4}{5}\times\ln(1-5\times0)-\left(-\frac{4}{5}\times\ln\left(1-5\times(-2)\right)\right)=-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\ln(11)$

4) $\int_1^2\frac{x^2+x-2}{x^2}dx=\int_1^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\left[x+\ln\left(\left|x\right|\right)+\frac{2}{x}\right]_1^2=2+\ln\left(\left|2\right|\right)+\frac{2}{2}-\left(1+\ln\left(\left|1\right|\right)+\frac{2}{1}\right)=\ln 2$

5) $\int_3^4\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx=\left[\frac{1}{4}x+\ln\left(\left|2-x\right|\right)-4\ln\left(\left|x+2\right|\right)\right]_3^4$

$=\left(\frac{1}{4}\times4+\ln\left(\left|2-4\right|\right)-4\ln\left(\left|4+2\right|\right)\right)-\left(\frac{1}{4}\times3+\ln\left(\left|2-3\right|\right)-4\ln\left(\left|3+2\right|\right)\right)=\frac{1}{4}-4\ln(3)+3\ln 2$

6) $\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^e u'(x)u(x)\,dx=\left[\frac{u^2(x)}{2}\right]_1^e=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\frac{1}{2}$

7) $\int_{-1}^{0}\frac{\ln(1-x)}{x-1}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x-1}\ln(1-x)dx=\int_{-1}^{0}-u'(x)u(x)\,dx=-\left[\frac{u(x)^2}{2}\right]_{-1}^{0}=-\left[\frac{\left(\ln(1-x)\right)^2}{2}\right]_{-1}^{0}$

$=-\frac{\left(\ln(1-0)\right)^2}{2}+\frac{\left(\ln(2)\right)^2}{2}=\frac{\left(\ln(2)\right)^2}{2}$

Exercice n°22

1) Pour tout x de $]1;+\infty[$, $x+4+\frac{3}{x-1}=\frac{(x+4)(x-1)+3}{x-1}=\frac{x^2-x+4x-4+3}{x-1}=\frac{x^2+3x-1}{x-1}=f(x)$

2) Pour calculer l'intégrale $\int_4^2\frac{x^2+3x-1}{x-1}dx$, on utilise la transformation d'écriture précédente. Ainsi $\int_4^2\frac{x^2+3x-1}{x-1}dx=\int_4^2\left(x+4+\frac{3}{x-1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+4x+3\ln\left|x-1\right|\right]_4^2=\left[\frac{x^2}{2}+4x+3\ln(x-1)\right]_4^2$ car pour tout $x\in[2,4]$, $x-1>0$. On conclut $\int_4^2\frac{x^2+3x-1}{x-1}dx=\frac{2^2}{2}+8+3\ln(2-1)-\left(\frac{4^2}{2}+16+3\ln(4-1)\right)=-14+3\ln(1)-3\ln 3=-14-3\ln 3$

Exercice n°23

1) Pour tout x de $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$, $ax+b-\frac{c}{3x+2}=\frac{(ax+b)(3x+2)-c}{3x+2}=\frac{3ax^2+(2a+3b)x+2b-c}{3x+2}=f(x)$ si et seulement si $\begin{cases}3a=6\\2a+3b=13\\2b-c=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\3b=13-2\times 2\\c=2b-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=3\\c=2\end{cases}$. Ainsi, pour tout x de $\left]-\frac{2}{3};+\infty\right[$, $f(x)=2x+3-\frac{2}{3x+2}$

2) Pour calculer $\int_0^2\frac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx$, on utilise la transformation d'écriture ci-dessus

$$\int_0^2\frac{6x^2+13x+4}{3x+2}dx=\int_0^2\left(2x+3-\frac{2}{3x+2}\right)dx=\left[x^2+3x-\frac{2}{3}\ln\left(|3x+2|\right)\right]_0^2$$

$$=2^2+3\times 2-\frac{2}{3}\ln\left(|3\times 2+2|\right)-\left(0^2+3\times 0-\frac{2}{3}\ln\left(|3\times 0+2|\right)\right)=10-\frac{2}{3}\ln 8+\frac{2}{3}\ln 2=10+\frac{2}{3}\ln\frac{2}{8}$$

Exercice n°24

1) g est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ en tant que produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x\in]0;+\infty[$, $g'(x)=1\times\ln x+x\times\frac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x$. g est donc une primitive de la fonction ln sur $]0;+\infty[$

2) On en déduit donc que $\int_1^e\ln x dx=\left[g(x)\right]_1^e=\left[x\ln x-x\right]_1^e=e\ln e-e-(\ln 1-1)=1$

Exercice n°25

$I=\int_1^e x\ln x dx=\int_1^e u(x)v'(x)dx$ où $u(x)=\ln x\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=x\Rightarrow v(x)=\frac{x^2}{2}$ sont continûment dérivables.

D'après la formule d'intégration par parties,

$$I=\left[u(x)v(x)\right]_1^e-\int_1^e u'(x)v(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}dx=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1^2}{2}\ln 1-\left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$$

Exercice n°26

1) En réduisant au même dénominateur : Pour tout t strictement positif,

$\frac{at^{n-1}+b}{t^n+1}+\frac{c}{t}=\frac{t\left(at^{n-1}+b\right)+c\left(t^n+1\right)}{t\left(t^n+1\right)}=\frac{(a+c)t^n+bt+c}{t\left(t^n+1\right)}=\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}$, si et seulement si, par identification, $\begin{cases}a+c=0\\b=0\\c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=0\\c=1\end{cases}$. Ainsi, pour tout t strictement positif, $\boxed{\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}=\frac{-t^{n-1}}{t^n+1}+\frac{1}{t}}$

2) On utilise l'écriture $f_n(t)=\frac{-t^{n-1}}{t^n+1}+\frac{1}{t}$ pour calculer l'intégrale :

$$\int_1^2 f_n(t)dt=\int_1^2\left(\frac{-t^{n-1}}{t^n+1}+\frac{1}{t}\right)dt=\left[-\frac{1}{n}\ln\left(t^n+1\right)+\ln(t)\right]_1^2=-\frac{1}{n}\ln\left(2^n+1\right)+\ln(2)+\frac{1}{n}\ln\left(1^n+1\right)+\ln(1)$$

$$=\frac{1}{n}\ln\left(1^n+1\right)-\frac{1}{n}\ln\left(2^n+1\right)+\ln(2)=\ln\left[\left(\frac{2}{2^n+1}\right)^{\frac{1}{n}}\right]+\ln\left(\left(2^n\right)^{\frac{1}{n}}\right)=\boxed{\ln\left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)}$$

3) On pose $u(t)=\ln t\Rightarrow u'(t)=\frac{1}{t}$ et $v'(t)=\frac{t^{n-1}}{\left(t^n+1\right)^2}=\frac{1}{n}\frac{w'(t)}{w^2(t)}$ où $w(t)=t^n+1$, donc $v(t)=-\frac{1}{nw(t)}=-\frac{1}{n\left(t^n+1\right)}$, et ainsi : $\int_1^2\frac{t^{n-1}\ln t}{\left(t^n+1\right)^2}dt=\int_1^2 u(t)v'(t)dt=\left[u(t)v(t)\right]_1^2-\int_1^2 u'(t)v(t)dt$

$$=\left[-\frac{\ln t}{n\left(t^n+1\right)}\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{t}\times\left(-\frac{1}{n\left(t^n+1\right)}\right)dt=-\frac{\ln 2}{n\left(2^n+1\right)}+\frac{1}{n}\int_1^2\frac{1}{t\left(t^n+1\right)}dt\boxed{=-\frac{\ln 2}{n\left(2^n+1\right)}+\frac{1}{n}\ln\left(\sqrt[n]{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right)}$$

Exercice n°27

1) Puisque pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\ln(u_{n+1})=1+\ln(u_n)=\ln(e)+\ln(u_n)=\ln(eu_n)$, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=eu_n$. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc une suite géométrique de raison } e \text{ et de premier terme } u_0=2}$

2) Puisque la raison de cette suite est $e>1$ et que $u_0>0$, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante et que}}$ $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=+\infty}$

3) Puisque la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e et de premier terme $u_0=2$, la somme $\sum_{k=0}^{n}u_k$ vaut donc

$$\boxed{\underbrace{u_0}_{\text{premier terme}}\times\frac{1-e^{\overbrace{n+1}^{\text{nombre de termes}}}}{1-\underbrace{e}_{\text{raison}}}=2\times\frac{1-e^{n+1}}{1-e}=\frac{2-2e^{n+1}}{1-e}}$$

4) Puisque la suite (u_n) est une suite géométrique de raison e et de premier terme $u_0=2$, on établit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0\times e^n=2e^n$. Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\ln\left(u_n\right)=\ln\left(2e^n\right)=\ln 2+\ln\left(e^n\right)=\ln 2+n\ln(e)=\ln 2+n$.

La somme $\sum_{k=1}^{n}\ln(u_k)$ vaut donc : $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\ln(u_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln 2+k\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln 2+\sum_{k=1}^{n}k=n\ln 2+\frac{n\left(n+1\right)}{2}=\frac{n\left(n+1\right)+2n\ln 2}{2}}$

En utilisant les propriétés de la fonction logarithme népérien,

puisque $\ln\left(u_1\times u_2\times...\times u_n\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln(u_k)=\frac{n\left(n+1\right)+2n\ln 2}{2}$ on déduit que $\boxed{u_1\times u_2\times...\times u_n=e^{\frac{n(n+1)+2n\ln 2}{2}}}$

Exercice n°27

1) f est quotient de deux fonctions dérivables sur $x\in\mathbb{R}^{+*}$, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$, $f\left(x\right)=\frac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)}$ avec $u\left(x\right)=\ln x\Rightarrow u'\left(x\right)=\frac{1}{x}$ et $v\left(x\right)=x\Rightarrow v'\left(x\right)=1$,

donc $\boxed{f'\left(x\right)=\frac{u'\left(x\right)v\left(x\right)-u\left(x\right)v'\left(x\right)}{\left(v\left(x\right)\right)^2}=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)\times 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2}}$

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$, $x^2>0$, donc $f'\left(x\right)$ aura le même signe que $1-\ln(x)$.

Ainsi $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 1-\ln(x)=0\Leftrightarrow\ln(x)=1\Leftrightarrow x=e$, et $f'\left(x\right)>0\Leftrightarrow 1-\ln(x)>0\Leftrightarrow\ln(x)<1\Leftrightarrow x<e$. On peut ainsi conclure que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \left]0;e\right], \text{ et strictement décroissante sur } \left[e;+\infty\right[}$

3) Une équation de la tangente à Cf au point d'abscisse 1 est donnée par $y=f'\left(1\right)\left(x-1\right)+f\left(1\right)$, c'est-à-dire $y=1\left(x-1\right)+0$, c'est-à-dire $\boxed{y=x-1}$

4) En remarquant que l'écriture de f est $f\left(x\right)=\frac{1}{x}\times\ln(x)$, donc de la forme $f\left(x\right)=u'\left(x\right)\times u\left(x\right)$ avec $u\left(x\right)=\ln\left(x\right)$, on en déduit qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$ est $\boxed{F\left(x\right)=\frac{1}{2}\left[u\left(x\right)\right]^2=\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2}$

5) La fonction G est la primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$, de la fonction f, qui s'annule en 1. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$, $G'\left(x\right)=f\left(x\right)$. Etudions le signe de $f\left(x\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, qui est le même que celui de $\ln x$ (car $x\in\mathbb{R}^{+*}\Leftrightarrow x>0$), donc $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow 0<x<1$ et $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x>1$. Ainsi $G'\left(x\right)<0\Leftrightarrow 0<x<1$ et $G'\left(x\right)>0\Leftrightarrow x>1$, donc $\boxed{\text{G est strictement décroissante sur } \left]0;1\right] \text{ et strictement croissante sur } \left[1;+\infty\right[.}$

Exercice n°28

1) Pour tout $x>0$, $\frac{f(x)}{x}=\frac{x}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}x\ln x-\frac{3x}{4}$. Or $\lim_{x\to 0} x\ln x=0$ (limite connue dite « de croissance comparée »), et $\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4}=0$. Par somme, on en conclut que $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. Puisque $f(0)=0$, on peut donc réécrire le résultat précédent sous la forme $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$, ce qui démontre que *f* est dérivable en 0 et ,que $f'(0)=0$

2) Pour tout $x>0$, $f'(x)=x\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)+\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{x}\right)=x\ln x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x=x\ln x-x=x(\ln x-1)$. Puisque $x>0$, $f'(x)$ est du signe de $\ln x-1$. Ainsi $f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x-1>0\Leftrightarrow \ln x>1\Leftrightarrow x>e$

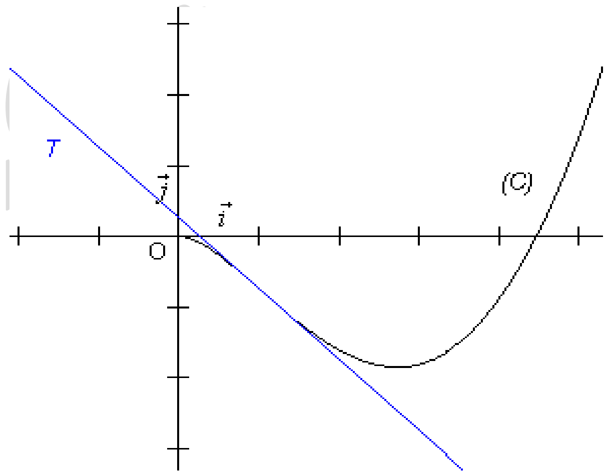
f est donc strictement décroissante sur $]0;e]$ et strictement croissante sur $[e;+\infty[$.

De plus, $\lim_{x\to+\infty}\ln x-\frac{3}{2}=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}=+\infty$, donc par produit $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

3) On calcule $f(e)=\frac{e^2}{2}\left(\ln(e)-\frac{3}{2}\right)=\frac{e^2}{2}\left(1-\frac{3}{2}\right)=-\frac{e^2}{4}<0$. Sur l'intervalle $[e;+\infty[$ *f* est continue et strictement croissante. De plus $f(e)<0$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Puisque $0\in\left[f(e);\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[$, **le théorème des valeurs intermédiaires** nous permet d'affirmer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x)=0$, sur $[e;+\infty[$

4) L'équation de T est $\boxed{y=f'(1)(x-1)+f(1)}$ D'après les calculs des questions précédentes, $f'(1)=1\times(\ln(1)-1)=-1$ et $f(1)=\frac{1^2}{2}\left(\ln(1)-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}$. L'équation de T est donc $y=-(x-1)-\frac{3}{4}$, c'est-à-dire $\boxed{y=-x+\frac{1}{4}}$

5) Courbe représentative



6) a) Pour calculer $I(\lambda)=\int_\lambda^e f(x)dx=\int_\lambda^e\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)dx$, on doit effectuer une **<u>intégration par parties</u>**

On pose $u(x)=\ln x-\frac{3}{2}\Rightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$ et $v'(x)=\frac{x^2}{2}\Rightarrow v(x)=\frac{x^3}{6}$, fonctions toutes deux continûment dérivables sur tout intervalle de la forme $]\lambda;e]$ (avec $\lambda>0$). Le calcul devient alors :

$$I(\lambda)=\int_\lambda^e f(x)dx=\int_\lambda^e\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)dx$$

$$\int_\lambda^e v'(x)u(x)\,dx=\left[u(x)v(x)\right]_\lambda^e-\int_\lambda^e u'(x)v(x)\,dx$$

$$\left[\frac{x^3}{6}\left(\ln x-\frac{3}{2}\right)\right]_\lambda^e-\int_\lambda^e\frac{x^3}{6}\times\frac{1}{x}dx=\frac{e^3}{6}\left(\ln e-\frac{3}{2}\right)-\frac{\lambda^3}{6}\left(\ln\lambda-\frac{3}{2}\right)-\int_\lambda^e\frac{x^2}{6}dx=-\frac{e^3}{12}-\frac{\lambda^3}{6}\ln\lambda+\frac{\lambda^3}{4}-\left[\frac{x^3}{18}\right]_\lambda^e$$

$$-\frac{e^3}{12}-\frac{\lambda^3}{6}\ln\lambda+\frac{\lambda^3}{4}-\frac{e^3}{18}+\frac{\lambda^3}{18}=-\frac{5e^3}{36}+\frac{11\lambda^3}{36}-\frac{\lambda^3}{6}\ln\lambda$$

b) Puisque $\lim_{\lambda\to 0}\lambda\ln\lambda=0$ et $\lim_{\lambda\to 0}\frac{11}{36}\lambda^3=0$, on en déduit, par somme, que $\lim_{\lambda\to 0}I(\lambda)=-\frac{5e^3}{36}$

c) Puisque pour tout $x\in]0;e]$, $f(x)<0$, l'intégrale $I(\lambda)=\int_\lambda^e f(x)dx$ représente, en unité d'aires, l'opposé de l'aire du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x=\lambda$ et $x=e$.

Si on fait tendre λ vers 0, on peut donc affirmer que l'aire du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=e$ vaut $\frac{5e^3}{36}$.

Exercice n°29

1) f est définie pour toutes les valeurs de x telles que $|x|>0$, c'est-à-dire $\boxed{D=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[}$. L'ensemble de définition de f étant symétrique par rapport à zéro, pour tout $x\in D$, $-x\in D$ et $f(-x)=-x\ln(|-x|)=-x\ln(|x|)=-f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$.

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty}|x|=+\infty$, et puisque $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln(u)=+\infty$, alors en posant $u=|x|$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(|x|)=+\infty$, puis par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(|x|)=+\infty$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$. De la même manière, puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(|x|)=+\infty$, donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty}x\ln(|x|)=-\infty$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty}$.

Enfin, $\lim\limits_{x\to0}|x|=0^+$, et puisque $\lim\limits_{\substack{u\to0\\u>0}}\ln(u)=-\infty$, on en déduit, en posant $u=|x|$, que $\lim\limits_{x\to0}\ln(|x|)=-\infty$. Puisque $\lim\limits_{x\to0}x=0$, on obtient alors une forme indéterminée « $0\times-\infty$ ». Pour la résorber, deux solutions s'offrent à nous :

- ou on applique la règle de croissance comparée : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln(|x|)=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}x\ln(|x|)=0$ car toute fonction polynômiale « l'emporte » sur la fonction logarithme népérien
- ou on distingue deux cas (ce que nous aurons à faire tôt ou tard !) :

Si $x>0$, $|x|=x$ donc $f(x)=x\ln(x)$ et alors $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln(x)=0}$ (limite bien connue, elle aussi de « croissance comparée »)

Si $x<0$, $|x|=-x$ donc $f(x)=x\ln(-x)=-(-x)\ln(-x)$. En posant $u=-x$, on se retrouve à examiner la limite $\lim\limits_{\substack{u\to0\\u>0}}-u\ln(u)$ qui est identique à la précédente. Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}-(-x)\ln(-x)=0$ c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=0}$.

Sur $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, f est dérivable en tant que composée et produit de fonctions qui le sont.

Pour tout $x\in]-\infty;0[$, puisque $f(x)=x\ln(-x)$, on en déduit, par applications successives des formules de dérivation $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$ et $(\ln(u))'=\dfrac{u'}{u}$, que $\boxed{f'(x)=1\times\ln(-x)+x\times\dfrac{-1}{-x}=\ln(-x)+1}$

Pour tout $x\in]0;+\infty[$, puisque $f(x)=x\ln(x)$, on en déduit que $\boxed{f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\dfrac{1}{x}=\ln(x)+1}$

2) Puisque pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)=\ln(x)+1$, on résout : $f'(\lambda)=0\Leftrightarrow\ln(\lambda)=-1\Leftrightarrow\boxed{\lambda=e^{-1}=\dfrac{1}{e}}$

Puisque $2,5\le e\le3$, $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{1}{e}\le\dfrac{1}{2,5}$. Comme $\dfrac{1}{3}\ge0,3$ et $\dfrac{1}{2,5}=0,4$, on trouve l'encadrement annoncé.

3) Pour tout $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)>0\Leftrightarrow\ln(x)>-1\Leftrightarrow x>\lambda$. Ainsi, la fonction f est strictement décroissante sur $]0;\lambda[$ et strictement croissante sur $]\lambda;+\infty[$, d'où le tableau de variations (avec $f(\lambda)=\lambda\ln(\lambda)=\dfrac{1}{e}\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}\times(-1)=-\dfrac{1}{e}$)

x	0		λ		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| 0	$\searrow$	$-\dfrac{1}{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

4) On effectue une intégration par parties sur l'intervalle $[1;x]$, avec $x>1$: $G(x)=\int_1^x g(t)dt=\int_1^x 1\times\ln(t)dt$

En notant $u(t)=\ln(t)\Rightarrow u'(t)=\dfrac{1}{t}$ et $v'(t)=1\Rightarrow v(t)=t$, fonctions toutes les deux continûment dérivables sur $[1;x]$, on obtient $G(x)=[u(t)v(t)]_1^x-\int_1^x u'(t)v(t)dt=[t\ln t]_1^x-\int_1^x\dfrac{1}{t}\times tdt=x\ln x-1\times\ln(1)-[t]_1^x=x\ln x-x+1$

La fonction G définie sur $[1;+\infty[$ par $\boxed{G(x)=x\ln x-x+1}$ est donc la primitive de la fonction g définie par $g(x)=\ln x$, qui s'annule en 1. Mais puisque toutes les primitives de la fonction g sont définies « à une constante près » ; la fonction $\boxed{x \longrightarrow x\ln x-x}$ est aussi une primitive de g.

Guesmi.B