

# LIMITE D'UNE FONCTION

## 1) Introduction

La limite d'une fonction, c'est en gros « vers quoi tend » la fonction.

Le plus simple est de prendre un exemple : la fonction

$$\text{inverse : } f : x \rightarrow \frac{1}{x}$$



On voit bien que quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur supérieure sans jamais la toucher. et bien on appelle cela une limite, puisque la fonction « tend vers » quelque chose. on note cette limite

$$\text{de la façon suivante : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

Et on prononce cela « limite quand  $x$  tend vers plus l'infini de  $\frac{1}{x}$  est égal 0 plus ».

## 2) LIMITE FINIE EN $a$ .

**Propriété :**  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{R}^*$

Les fonctions :  $x \mapsto x^2$  ;  $x \mapsto x^3$

;  $x \mapsto x^n$  ;  $x \mapsto k|x|$ ;  $x \mapsto k\sqrt{|x|}$ ;  $x \mapsto k|x|^n$

Tendent vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

**Propriété :** Si  $P$  est une fonction polynôme alors

$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$  Une fonction polynôme  $P$  c'est une

fonction qui s'écrit de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$  et  $l$  un réel. On dit que la fonction  $f$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  si :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - l = 0$ .

**Propriété :** Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  si on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

## Remarque :

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -l$$

**Propriété :** Si  $f$  admet une limite  $l$  en  $a$  alors cette limite est unique.

## 3) Limite infinies en $\pm\infty$

**Propriété :** Les fonctions :

$$x \mapsto x^2 ; x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*) ; x \mapsto \sqrt{x} ; x \mapsto |x|$$

Tendent vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$

## 4) Limite finie en $\pm\infty$

**Propriétés :** les fonctions  $x \mapsto \frac{k}{x}$  ;  $x \mapsto \frac{k}{x^2}$  ;  $x \mapsto \frac{k}{x^n}$  :

$$x \mapsto \frac{k}{|x|} ; x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}} ; x \mapsto \frac{k}{|x|^n} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

et  $k \in \mathbb{R}^*$  Tendent vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

## 5) Limite infinies en un point

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

## 6) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.

**Théorème :** Une fonction  $f$  admet une limite  $l$  en  $a$  si et seulement si elle admet une limite à droite de  $a$  égale à sa limite à gauche de  $a$  égale à  $l$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

## 7) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

### a) Opérations sur les limites finies.

**Propriété :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions tels que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l' \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = l \times l' \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |l| \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{g} \right)(x) = \frac{1}{l'} \text{ si } l' \neq 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f}{g} \right)(x) = \frac{l}{l'} \text{ si } l' \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f}(x) = \sqrt{l} \text{ si } l > 0$$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel  $a$ .

### b) Opérations sur les limites

**Limite de la somme**

$\lim f$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si  $x$  tend vers :  $a+$  ;  $a-$  ;  $+\infty$  ou  $-\infty$



**Formes indéterminées :** Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calculs car il y a plusieurs cas.

**Limites des produits**

$\lim f$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

**Limites des inverses**

$\lim f$	$\ell \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

**Limites des quotients**

$\lim f$	$\ell$	$\ell$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	$\ell$	0	$\pm\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

**8) Limites d'une fonction polynôme en  $\pm\infty$**

**Propriété :** La limite d'une fonction polynôme en  $+\infty$  ( $-\infty$ ) est la limite de son plus grand terme

En  $+\infty$  ( $-\infty$ )

**9) Limites d'une fonction rationnelle en  $\pm\infty$**

**Propriété :** La limite d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  ( $-\infty$ ) est la limite du rapport des termes de plus grand degré en  $+\infty$  ( $-\infty$ )

**Remarque :** La propriété précédente n'est vraie que si  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$

**10) Limites des fonctions trigonométriques.**

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$  on a :

a)  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$

b)  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

c) si  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$   $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$

g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$

h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

**11) LIMITES et ordres**

**Propriété 1:** Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  alors

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche et droites de  $a$  ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .)

**Propriété 2 :** 1) soit  $f$  est une fonction définie sur un intervalle de la forme  $I = ]a - r; a - r[ - \{a\}$

avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$

Si  $f$  admet une limite en  $a$  et  $f$  positif sur  $I$  alors

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$

2) soit  $f$  est une fonction définie sur un intervalle de la forme  $I = ]a - r; a - r[ - \{a\}$

avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$

Si  $f$  admet une limite en  $a$  et  $g$  admet une limite en  $a$  et  $f \leq g$  sur  $I$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

3) si on a :  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si  $x$  tend vers  $a$  à droite, ou  $a$  à gauche, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  en tenant compte des conditions pour chaque cas.

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche de  $a$ .)

**Propriété 3 :** 1) Si sur un intervalle de la forme

$]a, a + r[$  on a :  $u(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = +\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = +\infty$

2) Si sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  on a :  $u(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = -\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = -\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si  $x$  tend vers  $a$  à gauche, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  en tenant compte des conditions pour chaque cas.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

