

Feuille d'exercices : Limites et continuité avec corrections

Exercice 1 (* à **)

Calculer les limites suivantes :

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4}$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 + 1) - 2 \ln x$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\sqrt{x} + 1}$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + 4x)}{x}$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$ • $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{3x^2}$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3}$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)}$ • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}}$ • $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9}$ • $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1}$ |
|---|--|

Exercice 2 (** à ***)

Déterminer l'ensemble de définition, puis toutes les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes :

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $f_1(x) = \frac{x^2 + x \ln x}{x + 1}$ • $f_3(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ • $f_5(x) = -3x + \ln x$ • $f_7(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $f_2(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ • $f_4(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$ • $f_6(x) = \sqrt{x} + \ln x$ • $f_8(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$ |
|--|--|

Exercice 3 (**)

Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x \leq 1 + xe^x$. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Montrer que, $\forall x \in]-1; +\infty[, \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice 4 (*)

Déterminer des équivalents simples des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{x^2 + \ln x}{xe^{-x} + 2}$ en 0 et en $+\infty$
2. $g(x) = x(\ln(1+x))^4$ en 0 et en $+\infty$
3. $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
4. $k(x) = x \ln(1+x) - (x+1) \ln x$

Exercice 5 (**)

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 + 5x - 4}{2x + 1} & \text{si } x \neq -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x = -\frac{1}{2} \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x - e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} x \ln \frac{x^2 + 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} \ln(\sqrt{x} - 1) - \ln(x - 1) & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
5. $f(x) = x + \sqrt{x - \text{Ent}(x)}$

Exercice 6 (**)

Peut-on prolonger les fonctions suivantes par continuité aux bornes de leur ensemble de définition ?

- $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2}$
- $g(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$
- $h(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x+1}}$
- $k(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$

Exercice 7 (**)

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x > 0$, et $f(x) = 0$ si $x \leq 0$. Montrer que f est continue sur \mathbb{R} . Calculer sa dérivée et montrer qu'elle est aussi continue. Faire de même avec la dérivée seconde. Pour les motivés : prouver que, quel que soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ème de la fonction f est continue (mais là c'est du ****).

Exercice 8 (*)

Montrer que chacune des équations suivantes admet une solution sur l'intervalle I considéré.

1. $x^{2008} - x^{2007} = 1$ sur $I = [-1; 1]$.
2. $\ln x = \frac{x^2 - 5}{x + 2}$ sur $I = [1; 10]$.

3. $3x = 1 + \ln(2 + x^2)$ sur $I = [0; 1]$.
4. $e^x = 2 + x$ sur $[\ln 2; 2 \ln 2]$.
5. $x^3 - 3x^2 = -1$ sur $I = [-1; 1]$.

Déterminer par dichotomie (et en utilisant la calculatrice !) une valeur approchée à 0.01 d'une solution de chaque équation.

Exercice 9 (***)

On définit, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une seule solution strictement positive, qu'on notera désormais u_n .
2. Calculer u_1 et u_2 et vérifier que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left] 0; \frac{2}{3} \right[$.
3. Montrer que, $\forall x \in]0; 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. Que peut-on en déduire concernant la suite u_n ?
5. Montrer que u_n est convergente vers une limite qu'on notera l .
6. Déterminer la limite de u_n^n et en déduire la valeur de l .

Exercice 10 (***)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x - 2 + \ln x$.

1. Calculez $f(1)$ et $f(3)$. Que peut-on en déduire ?
2. Montrez que l'équation $f(x) = 0$ possède en fait une unique solution α sur \mathbb{R}_+^* .
3. À l'aide de la calculatrice et en procédant par dichotomie (décrivez les étapes), déterminez une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. Montrer que f est bijective de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} . On note g la réciproque de f , déterminer la continuité, le tableau de variation et les limites de g .
5. Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(g(t))}{g(t)}$. En déduire un équivalent de g en $+\infty$.

Exercice 11 (**)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle à expliciter.
2. Justifier que pour tout entier positif n , l'équation $f(x) = n$ possède une unique solution que l'on notera par la suite x_n .
3. Déterminer la monotonie de la suite x_n .
4. Démontrer que $\forall n \geq 1$, $\ln(n - \ln n) \leq x_n \leq \ln n$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) puis un équivalent simple de x_n .

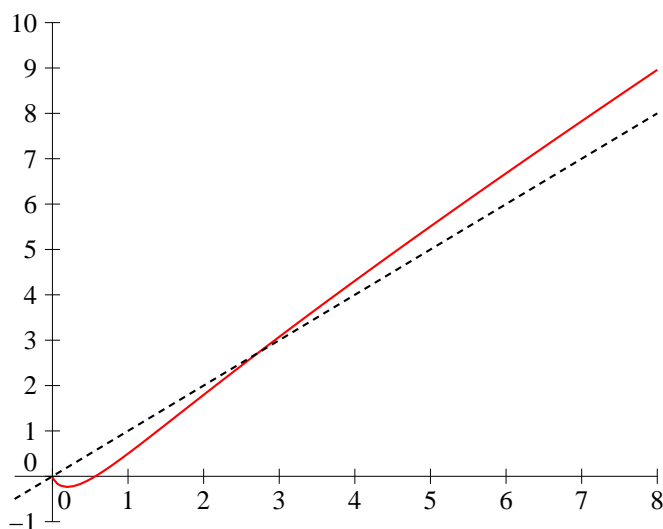
C C C c
c

Exercice1(*â)**

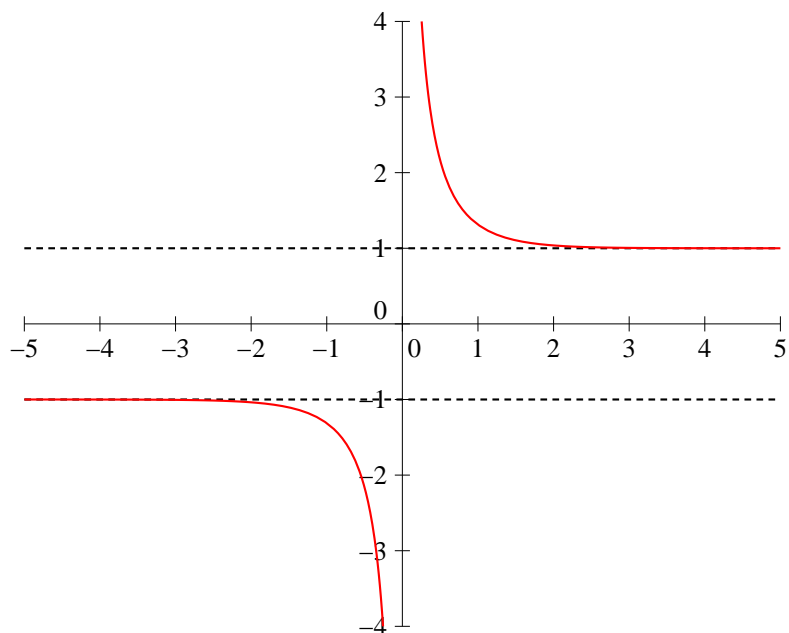
- $\frac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4} = e \times \frac{e^{3x}}{(\ln x)^4}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{(\ln x)^4} = +\infty$ par croissance comparée, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x+1}}{(\ln x)^4} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{3x^2} = +\infty$ par croissance comparée.
- $\ln(x^2+1) - 2\ln x = \ln(x^2+1) - \ln(x^2) = \ln \frac{x^2+1}{x^2} = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2+1) - 2\ln x = 0$.
- $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = \frac{8}{\sqrt{x+5} + \sqrt{x-3}}$ en multipliant par la quantité conjuguée, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{\sqrt{x} + 1} = 0$ (il n'y avait ici pas vraiment de difficulté, le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1).
- $x^x = e^{x \ln x}$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$.
- $(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln(1+x^2)}$. Comme $\ln(1+x^2) \underset{0}{\sim} x^2$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = 0$, et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$.
- Utilisons également les équivalents : $\ln(1+x) \underset{0^+}{\sim} x$, donc $\frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} \underset{0^+}{\sim} \frac{2\sqrt{x}}{x} \underset{0^+}{\sim} 2\sqrt{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\ln(1+x)} = 0$.
- Comme $4x$ tend vers 0 quand x tend vers 0, on a $\frac{\ln(1+4x)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{4x}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+4x)}{x} = 4$.
- En posant $X = \sqrt{x}$, on a $x^4 e^{-\sqrt{x}} = \frac{X^8}{e^X}$, avec X tendant vers $+\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$.
- En posant $X = \frac{1}{x}$, on se ramène exactement à calculer la limite en 0 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.
- Le numérateur prend pour valeur 11 pour $x = 3$, et $\lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 9 = 0^+$, donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x^2 - 9} = +\infty$.
- Il vaut mieux commencer par mettre au même dénominateur pour éviter de se retrouver face à une forme indéterminée : $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{x+2-1}{x^2-4} = \frac{x+1}{x^2-4}$. Le numérateur ayant pour limite 3 et le dénominateur 0^+ , $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} = +\infty$.
- Le numérateur et le dénominateur s'annulent en $x = 1$, on peut commencer par factoriser : si $x \neq 1$, $\frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x-1}{x+1}$. Ce nouveau quotient vaut 2 quand $x = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} = 1$

Exercice 2 (à ***)**

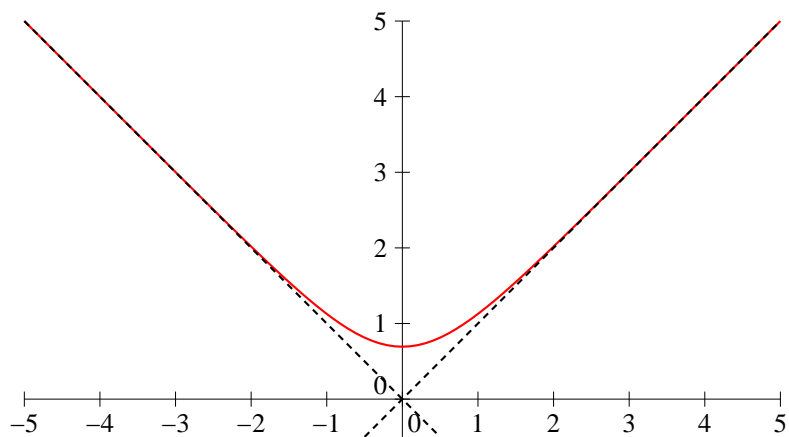
- La fonction f_1 est définie sur \mathbb{R}_+^* . En 0^+ , la limite de f_1 est égale à 0 puisque le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers 1, donc il n'y a pas d'asymptote verticale. Par contre, on peut prolonger f_1 par continuité en 0. Ensuite, $f_1(x) = \frac{x + \ln x}{1 + \frac{1}{x}}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$, et $\frac{f_1(x)}{x} = \frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = 1$. Il faut donc calculer $f(x) - x = \frac{x + \ln x - x - 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\ln x - 1}{1 + \frac{1}{x}}$. On a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = +\infty$, la courbe de f admet donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction $y = x$. Pour compléter, je rajoute pour chaque fonction l'allure de la courbe :



- La fonction n'est pas définie lorsque $e^x - e^{-x} = 0$, soit $e^x = e^{-x}$, ce qui implique $x = -x$, donc $x = 0$, d'où $\mathcal{D}_{f_2} = \mathbb{R}^*$. Les limites de f_2 en 0 sont infinies (le numérateur y tend vers 2 et le dénominateur vers 0), donc la courbe admet pour asymptote verticale l'axe des ordonnées. De plus $f_2(x) = \frac{e^x(1 + e^{-2x})}{e^x(1 - e^{-2x})}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = 1$, et la courbe admet pour asymptote horizontale en $+\infty$ la droite d'équation $y = 1$. De plus, f_2 est une fonction impaire car $f_2(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -f_2(x)$, donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_2(x) = -1$, et on a une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

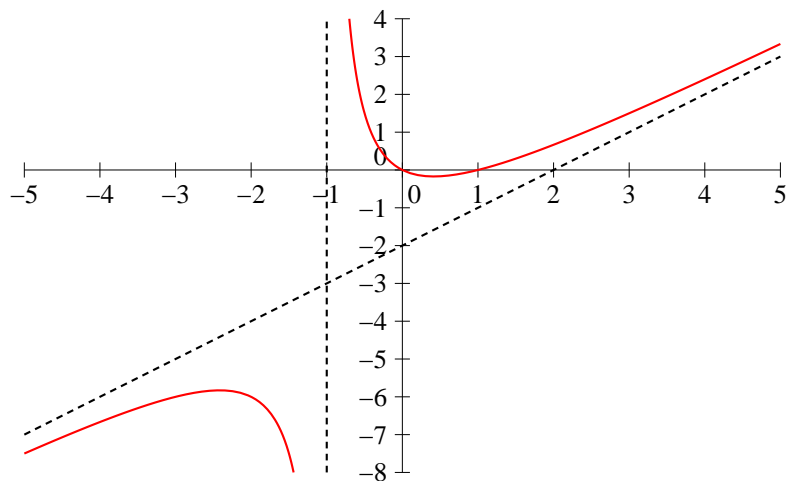


- La fonction f_3 est définie sur \mathbb{R} puisqu'une exponentielle est strictement positive. Il suffit donc de regarder ce qui se passe aux infinis, et on peut commencer par constater que f_3 est paire. La limite en $+\infty$ de f_3 est $+\infty$ et de plus $f_3(x) = \ln(e^x(1+e^{-2x})) = x + \ln(1+e^{-2x})$, donc $\frac{f_3(x)}{x} = 1 + \frac{\ln(1+e^{-2x})}{x}$, qui a pour limite 1 quand x tend vers $+\infty$. Enfin, $f(x) - x = \ln(1+e^{-2x})$, qui tend vers 0, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$. Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$.

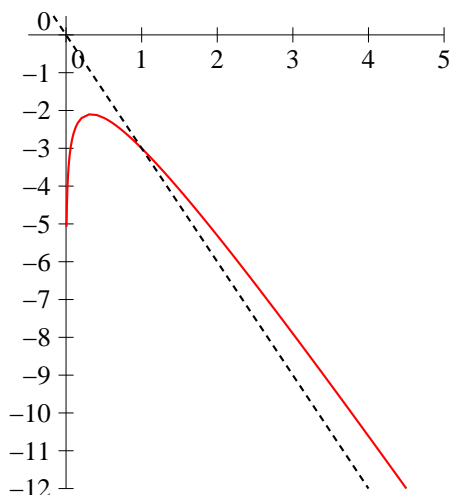


- Un classique : $\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. En -1 , le numérateur tend vers -4 et le dénominateur vers 0 , il y a donc des limites infinies et une asymptote verticale d'équation $x = -1$. Par contre, en 1 , numérateur et dénominateur tendent vers 0 , on est obligés de factoriser de chaque côté. Pour le numérateur, remarquons que $x^3 - 2x^2 + x = x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2$, donc pour $x \neq 1$, $f_4(x) = \frac{x(x-1)}{x+1}$, qui a pour limite 0 en 1 . Pas de deuxième asymptote verticale donc. Pour les infinis, utilisons les équivalents pour aller plus vite : $f_4(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^3}{x^2} = x$, donc les limites sont infinies, et $\frac{f_4(x)}{x} \underset{+\infty}{\sim} 1$. Reste à calculer $f(x) - x = \frac{x^3 - 2x^2 + x - x^3 + x}{x^2 - 1} =$

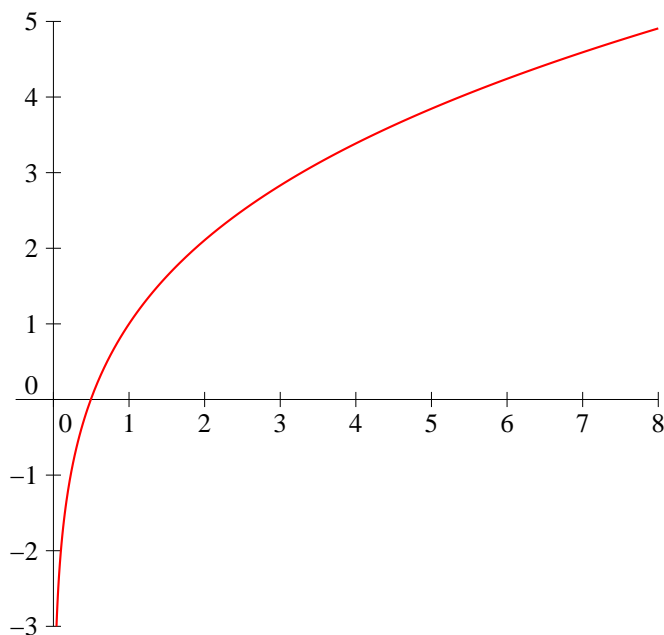
$\frac{-2x^2 + 2x}{x^2 - 1} \underset{+\infty}{\sim} -2$. Conclusion de tous ces calculs : la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$ (où les équivalents sont les mêmes).



- La fonction f_5 est définie sur \mathbb{R}_+^* , a pour limite $-\infty$ en 0, donc une asymptote verticale, et $+\infty$ en $+\infty$. De plus, $\frac{f(x)}{x} = -3 + \frac{\ln x}{x}$ a pour limite -3 , et $f(x) + 3x = \ln x$ tend vers $+\infty$, donc on a une branche parabolique de direction $y = -3x$.

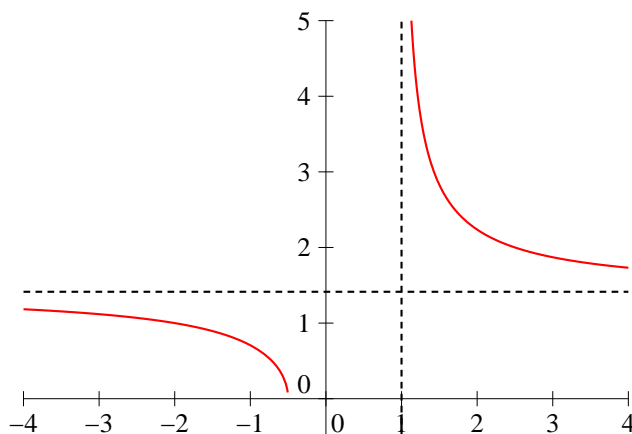


- Comme ci-dessus, le domaine de définition est \mathbb{R}_+^* et il y a une asymptote verticale en 0. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_6(x) = +\infty$ et $\frac{f_6(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\ln x}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_6(x)}{x} = 0$. Il y a donc en $+\infty$ une branche parabolique de direction (Ox) .

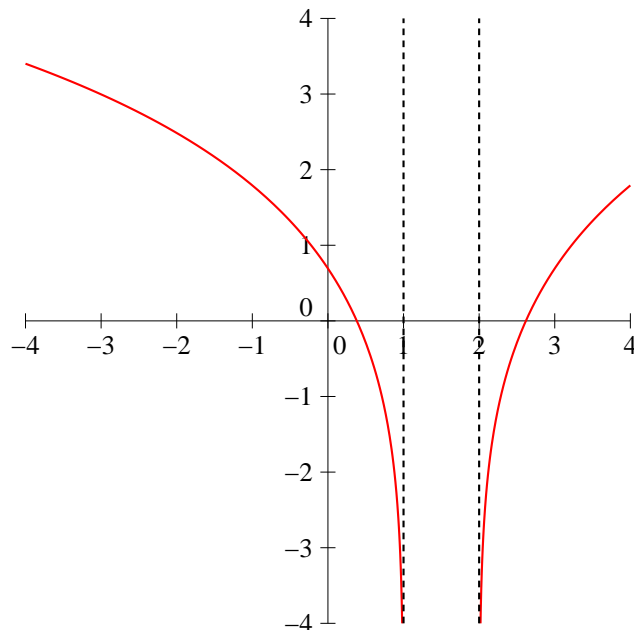


- La fonction f_7 est définie quand $\frac{2x + 1}{x - 1} \geq 0$, donc (petit tableau de signe) sur $]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup]1; +\infty[$.

En $-\frac{1}{2}$, il n'y a rien à faire, la fonction est définie, il ne peut pas y avoir d'asymptote verticale. Par contre, en 1, il y a bien une limite infinie, donc une asymptote verticale. Enfin, quand $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{2x + 1}{x - 1} \rightarrow 2$, donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_7(x) = \sqrt{2}$, il y a donc une asymptote horizontale d'équation $y = \sqrt{2}$.



- Enfin, f_8 est définie quand $x^2 - 3x + 2 > 0$, c'est-à-dire en dehors de ses racines évidentes qui sont 1 et 2, donc $\mathcal{D}_{f_8} =]-\infty; 1[\cup]2; +\infty[$. En 1 et 2, la parenthèse tend vers 0 donc la fonction vers $-\infty$, il y a donc deux asymptotes verticales. En $\pm\infty$, la fonction tend vers $+\infty$, et $\frac{f_8(x)}{x} = \frac{\ln(x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}))}{x} = \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$. Tout ceci tendant vers 0, il y a une branche parabolique de direction (Ox) .



Exercice 3 (**)

Pour montrer que $1 + x \geq e^x$, il n'y a pas vraiment d'autre choix que d'étudier la fonction $f : x \mapsto e^x - 1 - x$, qui est définie et dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $f'(x) = e^x - 1$, donc décroissante sur \mathbb{R}_- et croissante sur \mathbb{R}_+ . Elle atteint donc son maximum pour $x = 0$. Or, $f(0) = 0$, donc on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$, d'où $1 + x \leq e^x$.

De même, posons $g(x) = 1 + xe^x - e^x$, la fonction g est définie dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $g'(x) = e^x + xe^x - e^x = xe^x$. La fonction g est donc décroissante sur \mathbb{R}_- et croissante sur \mathbb{R}_+ , et atteint donc un minimum en 0 qui vaut aussi 0, d'où la deuxième inégalité. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq e^x - 1 \leq xe^x$, et $\forall x \neq 0, 1 \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq e^x$. Les deux termes extrêmes tendant vers 1 quand x tend vers 0, on a d'après le théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Similairement, posons $h(x) = x - \ln(1 + x)$, h est définie et dérivable sur $] - 1; +\infty[$, et $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, donc la fonction h est décroissante sur $] - 1; 0]$ et croissante sur \mathbb{R}_+ . Comme d'habitude, elle a un minimum nul en 0, ce dont on déduit que $\ln(1 + x) \leq x$.

Enfin, posons $k(x) = \ln(1 + x) - \frac{x}{1+x}$, de dérivée $k'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1+x-1}{(1+x)^2}$. Grande surprise, la fonction admet un minimum en 0, qui vaut 0, d'où la deuxième inégalité. On a alors $\forall x \in] - 1; +\infty[, \frac{1}{1+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$, donc par théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Exercice 4 (*)

1. $f(x) = \frac{x^2 + \ln x}{xe^{-x} + 2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x^2}{2}$ et $f(x) \underset{0}{\sim} \frac{\ln x}{2}$.
2. $g(x) = x(\ln(1+x))^4 \underset{+\infty}{\sim} x(\ln x)^4$ (on a le droit d'élever un équivalent à une puissance quelconque) et $g(x) \underset{0}{\sim} x \times x^4 \sim x^5$ en utilisant que $\ln(1+x) \sim x$.
3. $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1+\frac{1}{x})}$. L'exposant a pour limite 1 en $+\infty$ et 0 en 0, donc h a des limites finies égales à e et 1 en $+\infty$ et en 0.

4. $k(x) = x \ln(1+x) - (x+1) \ln x = x \ln(x(1+\frac{1}{x})) - x \ln x - \ln x = x \ln(1+\frac{1}{x}) - \ln x$. La limite du premier terme en $+\infty$ est 1 (cf Exercice 1), donc $k(x) \underset{+\infty}{\sim} -\ln x$. En 0, $k(x) \underset{0}{\sim} -\ln x$ (tout le reste tendant vers 0).

Exercice 5 (**)

Le seul problème qui se pose pour la continuité est l'endroit où on change la définition de la fonction.

1. On a $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} 4x^2 + 5x - 4 = -\frac{11}{2}$, donc f ne tend sûrement pas vers 0 quand x tend vers $-\frac{1}{2}$.

La fonction f est continue seulement sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

2. Il est indispensable de distinguer ce qui se passe en 0^+ et en 0^- : en 0^+ , $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers $+\infty$ et f a donc pour limite 0 en 0^+ . Par contre, en 0^- , $e^{\frac{1}{x}}$ tend vers 0, et même beaucoup plus rapidement que x , donc $f(x) \underset{0^-}{\sim} \frac{x^2}{x}$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. Finalement, la fonction f est tout de même continue en 0 puisque continue à gauche et à droite, elle est donc continue sur \mathbb{R} tout entier.

3. On a $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - x \ln x$ si $x > 0$. Chacun des deux termes tend vers 0 en 0^+ , donc la fonction est continue sur \mathbb{R}_+ .

4. Celle-ci est un peu plus difficile : $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \ln \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = -\ln(\sqrt{x}+1)$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\ln \sqrt{2}$. La fonction n'est donc pas continue en 1.

5. La fonction est définie sur \mathbb{R} ($x - Ent(x)$ est toujours positif, compris entre 0 et 1) et continue sur tous les intervalles de la forme $]n; n+1[$, avec $n \in \mathbb{Z}$ puisque les seuls points de discontinuité de la partie entière sont les entiers. Reste à déterminer ce qui se passe pour n : on a $f(n) = n + \sqrt{n-n} = n$, mais $\lim_{x \rightarrow n^-} x - Ent(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n + \sqrt{1} = n + 1$. La fonction est donc discontinue en tous les entiers.

Exercice 6 (**)

- La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et $f(x) = \frac{x-1-3}{(x-1)^2} = \frac{x-4}{(x-1)^2}$. La fonction f a donc des limites infinies quand x tend vers 1, elle n'y est pas prolongeable par continuité.
- La fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. De plus, numérateur et dénominateur ont pour limite 0 en -1 , on peut donc factoriser par $x+1$: $g(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = x-3$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -4$, et on peut donc prolonger g par continuité en posant $g(-1) = -4$.
- Ça ressemble au précédent ? C'est pourtant différent puisque cette fois h n'est définie que sur $] -1; +\infty[$, et $h(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{\sqrt{x+1}} = (x-3)\sqrt{x+1}$. Cette fois-ci, la limite en -1 vaut 0, donc on peut prolonger h par continuité en posant $h(-1) = 0$.
- La fonction k est définie sur \mathbb{R}_+^* , et a pour limite 0 en 0, donc est prolongeable par continuité à \mathbb{R}_+ en posant $k(0) = 0$.

Exercice 7 (**)

Seul 0 peut poser un problème de continuité à droite. Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x^2} = -\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, et f est bien continue en 0. De plus, $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Posons $X = \frac{1}{x}$, on a alors $f'(x) = 2X^3 e^{-X^2}$,

qui par croissance comparée a pour limite 0 en $+\infty$, donc f' est également continue en 0. On fait le même type de calcul pour $f'' : \forall x > 0, f''(x) = \left(\frac{6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, qui a également pour limite 0 en 0.

Pour les dérivées ultérieures, le principe est le même, mais pour tout traiter d'un seul coup, il est nécessaire d'effectuer une récurrence et d'avoir quelques connaissances sur les polynômes. On prouve en fait par récurrence que la n -ième dérivée de la fonction f (sur $]0; +\infty[$) peut s'écrire sous la forme $\frac{P_n(x)}{x^{a_n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$, où a_n est un entier naturel et P_n est un polynôme. C'est vrai pour $n = 1$ et même $n = 2$ d'après les calculs précédents. Supposons désormais que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{a_n}} e^{-\frac{1}{x^2}}$. On peut dériver cette fonction sur $]0; +\infty[$ et obtenir $\frac{x^{a_n} P'_n(x) - a_n n x^{a_n n-1} P_n(x)}{x^{2a_n}} e^{-\frac{1}{x^2}} - \frac{2P_n(x)}{x^{a_n+3}} e^{-\frac{1}{x^2}}$. Ceci est bien de la forme voulue, ce qui achève la récurrence. Or, un quotient de polynômes multiplié par $e^{-\frac{1}{x^2}}$ a toujours pour limite 0 en 0, donc la dérivée n -ième de f est continue en 0.

Exercice 8 (*)

Le principe est le même à chaque fois : la fonction étudiée est continue, et les signes des valeurs prises aux extrémités de l'intervalle sont opposés. Par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction s'annule sur l'intervalle.

1. Posons $f(x) = x^{2008} - x^{2007} - 1, f(-1) = 1 - (-1) - 1 = 1$, et $f(1) = 1 - 1 - 1 = -1$, donc f s'annule sur I . Par dichotomie, on obtient successivement, en notant a la solution cherchée, $f(0) = -1$ donc $a \in [-1; 0]$, puis $f(0.5) \simeq -1$ donc $a \in [-1; -0.5]$ etc. Il n'est pas très difficile de se convaincre que la valeur de a est extrêmement proche de $-1 : x^{2008} - x^{2007} = x^{2007}(x - 1)$, avec $x - 1 \in [-2; -1]$, donc x^{2007} doit être compris entre -0.5 et 1 pour que l'équation puisse être vérifiée, ce qui implique $0.5 \leq (-x)^{2007} \leq 1$, soit $\ln 0.5 \leq 2007 \ln(-x) \leq 0$, donc $e^{\frac{0.5}{2007}} \leq -x \leq 1$, soit $-x = 1$ à 0.001 près. On a donc $x \simeq -1$ à 0.01 près.

2. Posons $f(x) = \ln x - \frac{x^2 - 5}{x + 2}, f(1) = 0 - \frac{-4}{3} = \frac{4}{3}$, et $f(10) = \ln 10 - \frac{95}{12} < 0$ (car par exemple $e^4 > 2^4 > 16$, donc $4 > \ln 10$, et $\frac{95}{12} > 4 > \ln 10$), donc f s'annule sur I . Plutôt que de couper exactement en 2, faisons une dichotomie avec des valeurs pas trop affreuses : $f(5) \simeq -1.24$, donc $a \in [1; 5]$, puis $f(3) \simeq 0.30$, donc $a \in [3; 5]$; $f(4) \simeq -0.44$ donc $a \in [3; 4]$; $f(3.5) \simeq -0.6$ donc $a \in [3; 3.5]$; $f(3.25) \simeq 0.12$ donc $a \in [3.25; 3.5]$; $f(3.375) \simeq 0.03$ donc $a \in [3.375; 3.5]$; $f(3.44) \simeq -0.02$ donc $a \in [3.375; 3.44]$; $f(3.41) \simeq 0.001$, donc $a \in [3.41; 3.44]$; et enfin $f(3.425) \simeq -0.001$ donc $a \in [3.41; 3.425]$. On a donc $a \simeq 3.42$ à 0.01 près.

3. Posons $f(x) = 3x - 1 - \ln(2 + x^2), f(0) = 0 - 1 - \ln 2 < 0$ et $f(1) = 3 - 1 - \ln 3 = 2 - \ln 3 > 0$, car $e^2 > 3$, donc $\ln 3 < 2$. La fonction s'annule donc sur I . Toujours le même principe, je vais aller un peu plus vite : on calcule $f(0.5) \simeq -0.31$, puis $f(0.75) \simeq 0.31; f(0.625) \simeq 0.003; f(0.56) \simeq -0.16; f(0.59) \simeq -0.08$ et $f(0.61) \simeq -0.03$, dont on déduit que $a \simeq 0.62$ à 0.01 près. Constatons que quand on tombe au milieu des calculs sur une valeur très proche de 0, on a de bonnes chances d'être très près de la solution cherchée.

4. Posons $f(x) = e^x - 2 - x, f(\ln 2) = 2 - 2 - \ln 2 < 0$, et $f(2 \ln 2) = 4 - 2 - 2 \ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$, donc f s'annule sur I . Ici, les bornes de l'intervalle sont moyennement pratiques, mais elles valent environ 0.7 et 1.4, ce qui permet de couper en 1 puis de prendre des valeurs plus rondes ensuite : $f(1) \simeq -0.28; f(1.2) \simeq 0.12; f(1.1) \simeq -0.10; f(1.15) \simeq 0.008; f(1.125) \simeq -0.04; f(1.14) \simeq -0.01$, donc $a \simeq 1.14$ à 0.01 près.

5. Posons $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1, f(-1) = -1 - 3 + 1 = -3$ et $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$. Cane marchepas ? Si, car $f(0) = 1$, donc f s'annule en fait au moins deux fois sur I : une fois sur $[-1; 0]$ et une autre sur $[0; 1]$. Pour la dichotomie, contentons-nous de déterminer une valeur approchée de la solution se trouvant dans $[0; 1]$ (on peut naturellement trouver également une

approximation de la deuxième racine dont on connaît l'existence) : $f(0.5) = .375$; $f(0.75) \simeq -0.27$; $f(0.625) \simeq 0.07$; $f(0.69) \simeq -0.10$; $f(0.66) \simeq -0.02$; $f(0.64) \simeq 0.03$, donc $a \simeq 0.65$ à 0.01 près (pour les curieux, la racine appartenant à $[-1; 0]$ vaut environ -0.53).

Exercice 9 (***)

1. La fonction f_n étant somme de deux fonctions strictement croissantes sur $[0; +\infty[$, elle l'est également. Comme de plus elle est continue, $f(0) = -4$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, le théorème de la bijection nous permet d'affirmer l'existence d'un unique réel positif u_n tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. u_0 est solution positive de l'équation $1 + 9x^2 - 4 = 0$, soit $x^2 = \frac{1}{3}$, donc $u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Pour $n = 1$, l'équation devient $9x^2 + x - 4 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 1 + 144 = 145$, et admet deux racines dont une strictement positive (d'après la question précédente) qui ne peut être que $u_1 = \frac{-1 + \sqrt{145}}{18} \simeq 0.61$. De même, u_2 est solution positive de l'équation $10x^2 = 4$, d'où $u_2 = \sqrt{\frac{2}{5}} \simeq 0.63$. Pour vérifier que $u_n < \frac{2}{3}$, il suffit de constater que $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9 \times \frac{4}{9} - 4 = \frac{2^n}{3^n} > 0$, et d'appliquer la croissance stricte de la fonction f_n à l'inégalité $0 = f_n(u_n) < f_n\left(\frac{2}{3}\right)$.
3. On a $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+1} + 9x^2 - 4 - x^n - 9x^2 + 4 = x^n(1 - x)$. Cette expression étant positive si $x < 1$, on en déduit que $\forall x \in]0; 1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. On a notamment, puisque $0 < u_n < \frac{2}{3}$, $f_{n+1}(u_n) < f_n(u_n) = 0$. Comme par ailleurs $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$, on a donc $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$, ce dont on déduit via stricte croissance de f_{n+1} que $u_n < u_{n+1}$. Autrement dit, la suite (u_n) est strictement croissante.
5. La suite étant croissante et majorée par $\frac{2}{3}$, elle converge.
6. Comme $0 < u_n < \frac{2}{3}$, $0 < u_n^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$, donc via le théorème des gendarmes (et le fait que le membre de droite est une suite géométrique de raison inférieure à 1, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = 0$). Or, on a par définition $u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$ (puisque $f_n(u_n) = 0$). On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 9u_n^2 - 4 = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = \frac{4}{9}$. Comme $u_n > 0$, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{3}$.

Exercice 10 (***)

1. On a $f(1) = -1$ et $f(3) = 1 + \ln 3 > 0$, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f s'annule sur l'intervalle $[1; 3]$.
2. La fonction étant somme de deux fonctions strictement croissantes sur \mathbb{R}_+^* , elle l'est également, donc est injective, et l'équation $f(x) = 0$ ne peut pas avoir plus d'une solution.
3. On calcule $f(2) \simeq 0.69$, puis $f(1.5) \simeq -0.09$; $f(1.75) \simeq 0.31$; $f(1.625) \simeq 0.11$; $f(1.56) \simeq .004$; $f(1.53) \simeq -0.04$ et $f(1.55) \simeq -0.01$, donc la solution de l'équation $f(x) = 0$ vaut 1.56 à 10^{-2} près.
4. On a déjà vu que f était strictement croissante. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ (aucune forme indéterminée), donc f est bien bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Le théorème de la bijection nous permet d'affirmer que g est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* , strictement croissante, et de limites respectives 0 et $+\infty$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

5. Un petit coup de croissance comparée et on constate que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = +\infty$, on peut donc affirmer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(g(t))}{g(t)} = 1$ (composée de limites), c'est-à-dire que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{g(t)} = 1$ (puisque par définition de la réciproque $f(g(t)) = t$. Autrement dit, $g(t) \underset{+\infty}{\sim} t$.

Exercice 11 (**)

1. La fonction est somme de deux fonctions strictement croissantes, donc est strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, donc par théorème de la bijection, f est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
2. C'est une conséquence immédiate de la bijectivité de f .
3. Par définition, $f(x_n) < f(x_{n+1})$, donc par stricte croissance de f , $x_n < x_{n+1}$, et la suite (x_n) est strictement croissante.
4. C'est un calcul d'images : $f(\ln n) = e^{\ln n} + \ln n = n + \ln n \geq n$ si $n \geq 1$, donc on a $f(x_n) \leq f(\ln n)$, d'où $x_n \leq \ln n$. De même, $f(\ln(n - \ln n)) = e^{\ln(n - \ln n)} + \ln(n - \ln n) = n - \ln n + \ln(n - \ln n) = n - \ln \frac{n}{n - \ln n} < n$ puisque $\frac{n}{n - \ln n} < 1$. On en déduit de même que $\ln(n - \ln n) \leq x_n$.
5. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - \ln n = +\infty$ (croissance comparée), on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n - \ln n) = +\infty$, d'où par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. De plus, $\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} \leq \frac{x_n}{\ln n} \leq 1$, avec $\frac{\ln(n - \ln n)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1 - \frac{\ln n}{n})}{\ln n} = 1 + \frac{\ln(1 - \frac{\ln n}{n})}{\ln n}$. La quotient a pour limite 0, donc la suite $(\frac{x_n}{\ln n})$ est encadrée par deux suites de limite 1. Via le théorème des gendarmes, on en déduit que $x_n \sim \ln n$.