Feuille d'exercices : corrigé **suite**

Exercice 9 (***)

1. Par une intégration par parties désormais classique consistant à poser $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x^2$, donc $u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$, on a $I_1 = \int_1^e x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}\, dx = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$.
2. Sur $[1; e]$, $0 \leqslant \ln x \leqslant 1$, donc $0 \leqslant (\ln x)^{n+1} \leqslant (\ln x)^n$. On a donc $0 \leqslant x^2(\ln x)^{n+1} \leqslant x^2(\ln x)^n$, puis par intégration $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite (I_n) est décroissante.
3. La suite est décroissante minorée par 0, elle converge donc.
4. Le plus simple est d'étudier la fonction $f : x \mapsto \ln x - \frac{x}{e}$. On a $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, qui est positif sur l'intervalle $[1; e]$. La fonction f est donc croissante sur $[1; e]$, et $f(e) = 1 - 1 = 0$, donc f est négative sur $[1; e]$. On en déduit que $I_n \leqslant \int_1^e x^2 \left(\frac{x}{e}\right)^n = \frac{1}{e^n}\int_1^e x^{n+2}\, dx = \frac{1}{e^n}\left[\frac{x^{n+3}}{n+3}\right]_1^e = \frac{e^{n+3}-1}{e^n(n+3)} = \frac{e^3 - \frac{1}{e^n}}{n+3}$. La majoration calculée tendant vers 0, notre cher théorème des gendarmes s'applique et (I_n) converge vers 0.
5. Il s'agit bien sûr d'une intégration par parties, avec $u(x) = (\ln x)^{n+1}$ et $v'(x) = x^2$, donc $u'(x) = (n+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^n$ et $v(x) = \frac{x^3}{3}$:
$I_{n+1} = \left[\frac{x^3}{3}(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e (n+1)\frac{x^2}{3}(\ln x)^n = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3}I_n$ En faisant tendre n vers $+\infty$, on a donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{3}I_n = \frac{e^3}{3}$, donc $I_n \sim \frac{e^3}{n+1} \sim \frac{e^3}{n}$.

Exercice 10 (**)

- Si on note $g(t) = e^{-3\sqrt{2\ln t}}$, et G une primitive de g sur $]1; +\infty[$ (il faudrait changer la borne inférieure dans l'énoncé pour mettre quelque chose de plus grand que 1, par exemple 2, la fonction g n'étant pas définie pour $x < 1$ ...), on aura (par définition de l'intégrale) $f_1(x) = G(2x) - G(2)$, donc en utilisant la formule de dérivation des fonctions composées $f_1'(x) = 2g(2x) = 2e^{-3\sqrt{2\ln(2t)}}$
- Même principe que ci-dessus : on note $g(t) = \frac{1}{1+t+t^2}$ (qui est pour le coup définie sur $\mathbb{R}$ puisque le dénominateur a un discriminant négatif), et G une primitive de g, on a alors $f_2(x) = G(x^2) - G(x)$, donc $f_2'(x) = 2xg(x^2) - g(x) = \frac{2x}{1+x^2+x^4} - \frac{1}{1+x+x^2}$.
- Posons donc $g(t) = \sqrt{1+t^2}$ (encore une fois définie sur $\mathbb{R}$) et G une primitive ; $f_3(x) = G(-x) - G(x)$, donc $f_3'(x) = -g(-x) - g(x) = -\sqrt{1+(-x)^2} - \sqrt{1+x^2} = -2\sqrt{1+x^2}$

- Cette fois, $g(t) = \dfrac{t}{\ln t}$ (définie sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$), et f_4 n'est définie nulle part puisque $-\sqrt{x}$ est toujours négatif quand la valeur existe. Inutile donc de chercher à dériver f_4.

Exercice 11 (***)

1. La fonction f est la primitive de $\dfrac{e^x}{x}$ s'annulant en 1. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{e^x}{x}$. Cette dérivée étant positive sur $\mathbb{R}_+^*$, f y est croissante.
2. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $g'(x) = \dfrac{e^x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Cette dérivée est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc g y est croissante. Comme $g(1) = f(1) - \ln 1 = 0$, la fonction g est donc négative sur $]0;1]$ et positive sur $[1;+\infty[$ ($f(1) = 0$ car on effectue alors une intégrale sur l'intervalle $[1;1]$).
3. D'après la question précédente, on a $f(x) \leqslant \ln x$ sur $]0;1[$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$; de même, $f(x) \geqslant \ln x$ si $x \geqslant 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 12 (** à ***)

- Le but est donc de faire apparaitre une somme de Riemann, ce qui consiste en gros à sortir un $\dfrac{1}{n}$ de la somme et à exprimer ce qui reste dans la somme en fonction de $\dfrac{k}{n}$ uniquement : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann permet alors d'affirmer que (u_n) converge et que sa limite vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$.
- Même méthode : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2k}{n}}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$, donc (v_n) converge vers $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}}\,dx = \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1 = \sqrt{3}-1$.
- Pour w_n, c'est un peu plus subtil, il vaut mieux étudier $\ln(w_n)$ et surtout se rendre compte que $\ln(n!) = \ln(1\times 2\times\cdots\times n) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$. On a alors : $\ln w_n = \dfrac{1}{n}(\ln((2n)!) - n\ln n - \ln(n!)) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n} \ln k - n\ln n - \sum_{k=1}^{k=n} \ln k\right) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n+1}^{k=2n} (\ln k - \ln n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{k=2n} \ln\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\frac{n+k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$, donc $(\ln w_n)$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_1^2 \ln u\,du = [x\ln x - x]_1^2 = 2\ln 2 - 1$, et (w_n) converge vers $e^{2\ln 2 - 1} = \dfrac{4}{e}$.

Exercice 13 (**)

1. Il suffit pour cela de dire que le dénominateur $1+t+t^n$ ne s'annule jamais sut l'intervalle $[0;1]$ (il est toujours supérieur à 1), donc que la fonction à intégrer est continue sur $[0;1]$, ce qui assure l'existence de son intégrale.
2. Calculons donc : $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}dt = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln 3 - \ln 2$; et $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t}dt =$

$\left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$.

3. (a) Pour tout t dans $[0;1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$, donc $1+t+t^{n+1} \leqslant 1+t+t^n$ puis (tout étant positif) $\frac{1}{1+t+t^{n+1}} \geqslant \frac{1}{1+t+t^n}$. En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient $u_{n+1} \geqslant u_n$, la suite (u_n) est donc croissante.

   (b) Il faut réussir à majorer intelligemment ce qui se trouve sous l'intégrale, en l'occurence en constatant que $\forall t \in [0;1]$, $1+t+t^n \geqslant 1+t$, donc $\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}$. En intégrant l'inegalité, on obtient $u_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$.

   (c) La suite (u_n) est donc croissante et majorée, elle converge.

4. (a) En utilisant le calcul fait un peu plus haut, on a $\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

   (b) Il suffit d'arriver à majorer ce qui se trouve sous l'intégrale : $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} = \frac{1+t+t^n-(1+t)}{(1+t)(1+t+t^n)} = \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}$. Or, ce magnifique dénominateur est certainement plus grand que 1 quand $t \in [0;1]$, donc $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n} \leqslant t^n$, et en intégrant cette inégalité on a $\ln 2 - u_n \leqslant \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

   (c) On a vu plus haut que $u_n \leqslant \ln 2$, donc $\ln 2 - u_n \geqslant 0$. Comme on vient de majorer par ailleurs cette même expression par quelque chose qui tend vers 0, un coup de théorème des gendarmes nous donnes $\lim\limits_{n\to+\infty}(\ln 2 - u_n) = 0$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice 14 (ESCP 92) (****)

1. (a) Prenons deux réels x et y dans $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x < y$. On a alors $e^{-tx} > e^{-ty}$ pour tout $t \in [0;1]$. De même $t^k e^{-tx} > t^k e^{-ty}$ et on peut intégrer cette inégalité, ce qui donne exactement $f_k(x) > f_k(y)$, donc f_k est bien décroissante.

   (b) On a $f_k(0) = \int_0^1 t^k\ dt = \frac{1}{k+1}$. La suite $(f_k(0))$ est donc décroissante et tend vers 0. Or, f_k étant positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $\forall x > 0$, $0 \leqslant f_k(x) \leqslant \frac{1}{k+1}$, ce qui suffit à assurer via le théorème des gendarmes que $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2. (a) Il s'agit de faire une IPP en posant $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-tx}$, donc $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v(t) = -\frac{e^{-tx}}{x}$ (faites bien gaffe que la variable ici est t et x est donc une constante). On obtient $f_{k+1}(x) = \left[-t^{k+1}\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 + (k+1)\int_0^1 t^k\frac{e^{-tx}}{x}\ dx = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{k+1}{x}f_k(x)$.

   (b) On a $f_0(x) = \int_0^1 e^{-tx}\ dt = \left[-\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^1 = -\frac{e^{-x}}{x} + \frac{1}{x} = \frac{1-e^{-x}}{x}$. On peut utiliser la question précédente pour calculer les fonctions suivantes : $f_1(x) = \frac{1}{x}f_0(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^2}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$, puis $f_2(x) = \frac{2}{x}f_1(x) - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{1}{x^3}(2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - x^2e^{-x})$.

   (c) Il suffit de reprendre l'expression trouvée : $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$, donc $f_0 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

(d) Il faut faire une récurrence : on vient de montrer le résultat pour $k = 0$. Supposons le vrai pour f_k, on a alors $f_{k+1}(x) = \frac{f_k(x)}{x}\left(k+1-\frac{e^{-x}}{f_k(x)}\right)$. La parenthèse tend vers $k+1$ car l'exponentielle négative, par croissance comparée, l'emporte sur f_k qui est par hypothèse de récurrence équivalente à une fonction puissance. On a donc $f_{k+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{k+1}{x} f_k \sim \frac{k+1}{x}\frac{k!}{x^{k+1}} \sim \frac{(k+1)!}{x^{k+2}}$, ce qui achève la récurrence.

3. (a) Le changement de variable est $u = tx$, qui donne $du = x\ dt$, et change les bornes de l'intégrale en 0 et x, ce qui donne donc $f_k(x) = \int_0^1 t^k e^{-tx} dt = \int_0^x \left(\frac{u}{x}\right)^k e^{-u}\ \frac{du}{x} = \frac{1}{x^{k+1}}\int_0^x u^k e^{-u}\ du$.

(b) On vient décrire $f_k(x)$ sous la forme d'un produit $g(x)h(x)$, où $g(x) = \frac{1}{x^{k+1}}$, et donc $g'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}$, et $h(x) = \int_0^x u^k e^{-u}\ du$, donc $h'(x) = x^k e^{-x}$. On en déduit que $f_k'(x) = -\frac{k+1}{x^{k+2}}h(x) + \frac{1}{x^{k+1}}x^k e^{-x} = -\frac{k+1}{x}f_k(x) + \frac{e^{-x}}{x}$. On vient donc de montrer, en reprenant le résultat de la question 2.a, que $f_k' = -f_{k+1}$.

(c) On étudie la fonction $y \mapsto 1 - e^{-y} - y$ sur $\mathbb{R}^+$. sa dérivée vaut $e^{-y} - 1$, qui est négative sur l'intervalle d'étude. Or, pour $y = 0$, la fonction est nulle. Elle est donc bien négative sur $\mathbb{R}^+$.

On a donc $f_k(x) - f_k(0) = \int_0^1 t^k e^{-tx}\ dt - \int_0^1 t^k\ dt = \int_0^1 t^k(e^{-tx}-1)\ dt \geqslant \int_0^1 t^{k+1}x\ dt = \frac{x}{k+2}$. Quand x tend vers 0, ceci tend vers 0. Comme par ailleurs $f_k(x) - f_k(0)$ est négatif puisque f_k est décroissante, la fonction f_k est bien continue en 0.

Pour la dérivée, on utilise ce bon vieux théorème du prolongement C^1 ! La fonction f_k est dérivable et C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $f_k' = -f_{k+1}$. On vient de voir que f_{k+1} était continue en 0, donc $\lim\limits_{x\to 0} f_{k+1}(x) = f_{k+1}(0) = \frac{1}{k+2}$. On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f_k'(x) = -\frac{1}{k+2}$ puis que f_k est dérivable en 0, de dérivée $f_k'(0) = -\frac{1}{k+2}$.