Feuille d'exercices : Ensembles et applications

Exercice 1 (*)

Dans l'ensemble des entiers naturels, on considère les trois sous-ensembles $A = \{1.3; 5; 7; 9\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $C = \{5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Déterminer les ensembles suivants : $\overline{A}$; $B \backslash A$; $A \cup B \cup C$; $C \cap B$; $A \cup (B \cap C)$.

Exercice 2 (* à **)

On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère les ensembles $A = [4; 12]$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant 5\}$, et $C = \mathbb{N}$. Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants : $A \cup B$; $A \cap C$; $\mathbb{R} \backslash B$; $A \cap \overline{C}$; $(A \cup B) \cap C$; $A \cup (B \cap C)$; $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup C)$.

Exercice 3 (* si vous n'avez pas tout oublié sur les quadrilatères)

Cet exercice vous rappelera de (bons ?) souvenirs de géométrie du collège. On note Q l'ensemble du quadrilatère du plan, A l'ensemble des quadrilatères ayant un angle droit, P l'ensemble des parallélogrammes, T l'ensemble des trapèzes, C l'ensemble des carrées, R l'ensemble des rectangles, et L l'ensemble des losanges.

Parmi tous ces ensembles, déterminer qui est inclus dans qui, puis déterminer ce que valent les ensembles $A \cap L$, $A \cap P$ et $L \cap R$.

Exercice 4 (**)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E. Montrer que $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.

Exercice 5 (***)

Montrer que, si A, B et C sont trois sous-ensembles d'un même ensemble E, $(A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A) = (A \cup B \cup C) \backslash (A \cap B \cap C)$.

Exercice 6 (***)

Soient A et B deux sous-ensembles d'un même ensemble E. On définit une nouvelle opération $\star$ de la façon suivante : $A \star B = \overline{A \cap B}$. Exprimer le plus simplement possible les ensembles suivants : $A \star A$; $(A \star A) \star (B \star B)$; $(A \star B) \star (A \star B)$.

Exercice 7 (**)

L'application $x \mapsto 2x$ est-elle injective, surjective, bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Et de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? Et de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 8 (**)

Déterminer pour chacune des applications suivantes si elle est injective, surjective ou bijective (ou rien du tout !) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$:

- $f_1(n) = n + 5$
- $f_2(n) = n^2$
- $f_3(n) = n + 1$ si n est pair, et $f_3(n) = n - 1$ si n est impair
- $f_4(n) = Ent\left(\frac{n}{3}\right)$
- $f_5(n) = |n - 10|$

Exercice 9 (* pour la première moitié, ** pour la deuxième)

Soit f la fonction inverse. Déterminer $f([2;4])$; $f(]0;2])$; $f([-1;5])$, ainsi que les images réciproques de ces trois intervalles par f.

Soit g la fonction définie par $g(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2-4}$. Déterminer son ensemble de définition et étudier rapidement g (vous avez le droit de dériver...). Déterminer $g([-1;1])$; $g([-6;-3[)$; $g^{-1}(]-\infty;1])$; $g^{-1}([0;1])$.

Exercice 10 (**)

Démontrer qu'une fonction strictement croissante est nécessairement injective. Déterminer les solutions de l'équation $x + e^x = 1$.

Exercice 11 (***)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction de y le nombre d'antécédents de y et leur valeur quand il y en a.
2. L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
3. Montrer que $\forall x \in [-1;1]$, $f(x) \in [-1;1]$. La restriction de $f : [-1;1] \to [-1;1]$ est-elle bijective ?

Exercice 12 (**)

On définit sur $\mathbb{R}$ une application f par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Déterminer si d est injective, surjective, bijective.

Exercice 13 (**)

Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 14 (****)

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leqslant n$. Montrer qu'on a en fait $f = id_{\mathbb{N}}$.