Fonctions Logarithmes

Exercices corrigés

1. 1. Vrai-Faux

Fesic 2002, exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$, D son ensemble de définition et C sa courbe représentative.

a. On a D =]0, +∞[.

b. La courbe C admet une droite asymptote en +∞.

c. Pour tout $x \in$ D, on a : $f(x)<\frac{x}{2}$.

d. Pour tout $x \in$ D, on a : $f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{x(\ln x)^2}$.

Correction

a. Faux : On doit avoir $\sqrt{x}\neq 1$ et $x>0$ donc D= $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

b. Vrai : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty-\frac{1}{+\infty}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\frac{x}{2}=0$ donc $y=\frac{x}{2}$ est asymptote de C.

c. Faux : $f(x)<\frac{x}{2}$ si $-\frac{1}{\ln(\sqrt{x})}<0$, soit $\ln(\sqrt{x})>0$ donc quand $\sqrt{x}>1\Rightarrow x>1$.

d. Vrai : Rappelons que $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u}$ et remarquons que $f(x)=\frac{x}{2}-\frac{2}{\ln x}$; nous avons donc

$$f'(x)=\frac{1}{2}-2\left(-\frac{1/x}{(\ln x)^2}\right)=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}\right).$$

1. 2. Fonction ln, EPF 2006

1. On considère la fonction $f:x\mapsto\frac{x}{x^2+x+1}$. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer la fonction dérivée f' de f.

2. On considère la fonction $g:x\mapsto\frac{\ln x}{(\ln x)^2+\ln x+1}$ et on désigne par Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unités graphiques 1 cm.

a. Exprimer g en fonction de f et préciser l'ensemble de définition de g.

b. Déterminer la fonction dérivée g' de g (on pourra utiliser la question 1.).

c. Etudier le signe de g'.

d. Déterminer les limites de g en 0 et $+\infty$.

e. Dresser le tableau des variations de g.

f. Construire la courbe Γ en précisant la tangente au poiint d'abscisse 1.

Correction

1. f est un quotient de fonctions dérivables et le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^2}.$$

2. a. $g(x)=\dfrac{\ln x}{\ln^2 x+\ln x+1}=f(\ln x)$ donc, comme f est définie sur $\mathbb{R}$, g est définie sur $]0\,;+\infty[$.

b. $(f\circ g)'=g'\times(f'\circ g)$. $g'(x)=\dfrac{1}{x}f'(\ln x)=\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{-\ln^2 x+1}{\left(\ln^2 x+\ln x+1\right)}\right]$.

c. Le signe de g' dépend de celui de $1-\ln^2 x=(1-\ln x)(1+\ln x)$.

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$1-\ln x$	||	$+$		$+$	0	$-$	
$1+\ln x$	||	$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	|| 0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

d. En $+\infty$ g se comporte comme les termes de plus haut degré en ln, soit $\dfrac{\ln x}{\ln^2 x}=\dfrac{1}{\ln x}\to\dfrac{1}{+\infty}=0$; en 0 c'est pareil car $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc encore 0 comme limite.

f. Tangente au point d'abscisse 1 : $y=x-1$.

1. 3. Equation, France 2004

6 points

L'exercice comporte une annexe à rendre avec la copie.

Le but de ce problème est d'étudier, pour x et y éléments distincts de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, les couples solutions de l'équation $x^y=y^x$ (E) et, en particulier, les couples constitués d'entiers.

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln y}{y}$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. La courbe (C) représentative de la fonction h est donnée en annexe ; x_0 est l'abscisse du maximum de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a. Rappeler la limite de la fonction h en $+\infty$ et déterminer la limite de la fonction h en 0.

b. Calculer $h'(x)$, où h' désigne la fonction dérivée de h ; retrouver les variations de h. Déterminer les valeurs exactes de x_0 et $h(x_0)$.

c. Déterminer l'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses.

3. Soit λ un élément de l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$.

Prouver l'existence d'un unique nombre réel a de l'intervalle $]1\,;e[$ et d'un unique nombre réel b de l'intervalle $]e\,;+\infty[$ tel que $h(a)=h(b)=\lambda$.

Ainsi le couple (a,b) est solution de (E).

4. On considère la fonction s qui, à tout nombre réel a de l'intervalle $]1\,;e[$, associe l'unique nombre réel b de l'intervalle $]e\,;+\infty[$ tel que $h(a)=h(b)$ (on ne cherchera pas à exprimer $s(a)$ en fonction de a).

Par lecture graphique uniquement et sans justification, répondre aux questions suivantes :

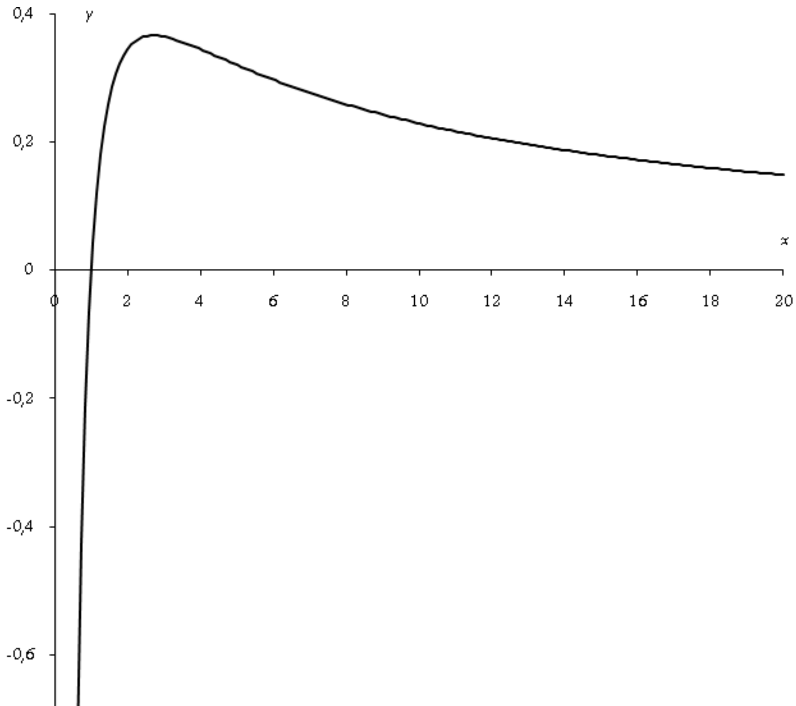
a. Quelle est la limite de s quand a tend vers 1 par valeurs supérieures ?

b. Quelle est la limite de s quand a tend vers e par valeurs inférieures ?

c. Déterminer les variations de la fonction s. Dresser le tableau de variations de s.

5. Déterminer les couples d'entiers distincts solutions de (E).

A rendre avec la copie.



Correction

1. (E) : $x^y=y^x \Leftrightarrow \ln(x^y)=\ln(y^x)\Leftrightarrow y\ln x = x\ln y \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=\frac{\ln y}{y}$: pour la première égalité, ln est bijective, x et y sont strictement positifs ; la deuxième est une propriété de ln, le reste est du calcul.

2. a. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\ln x=+\infty\times-\infty=-\infty$.

b. $h'(x)=\frac{\frac{1}{x}x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$; $1-\ln x\geq 0\Leftrightarrow \ln x\leq 1\Leftrightarrow x\leq e=x_0$; $h(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$.

c. $h(x)=0\Leftrightarrow \ln x=0\Leftrightarrow x=1$.

3. h **est continue, monotone strictement croissante** de $]1\,;e[$ vers $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$ (voir les variations de h) ; il existe donc un unique réel a tel que $h(a)=\lambda$; de même h **est continue, monotone strictement décroissante** de $]e\,;+\infty[$ vers $\left]0\,;\frac{1}{e}\right[$ (voir les variations de h) ; il existe donc un unique réel b tel que $h(b)=\lambda$ (sur chacun des intervalles considérés h est bijective, même si elle ne l'est pas globalement).

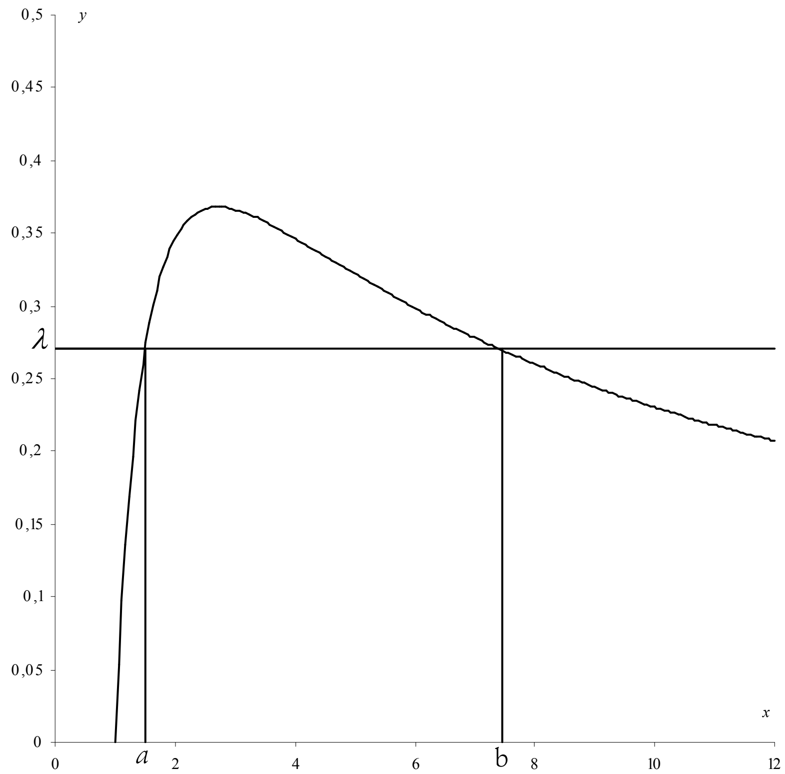
4. $s(a) = b$.

a. Quand a tend vers 1, λ tend vers 0, donc b tend vers $+\infty$.

b. Quand a tend vers e inférieurement, λ tend vers $1/e$, donc b tend vers e supérieurement.

c. Lorsque a varie de 1 à e, b varie de $+\infty$ à e, donc s est décroissante.

5. Entre 1 et e il n'y a que deux entiers : 1 et 2 ; pour $a = 1$, $b = +\infty$ … pour $a = 2$, b semble valoir 4. Vérifions en remplaçant dans (E) : $2^4 = 16, 4^2 = 16$ ok !



1. 4. Dérivées et ln

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\left(\ln x\right)^2-6\ln x+5$.

2. $f(x)=2x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$.

3. $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$.

Correction

1. $f'(x)=2\frac{1}{x}\times\ln x-6\frac{1}{x}=\frac{2\ln x-6}{x}$.

2. $f(x)=2x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=2x+\ln(x+1)-\ln x \Rightarrow$

$f'(x)=2+\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x(x+1)+x-x-1}{x}=\dfrac{2x^2+2x-1}{x}=2x+2-\dfrac{1}{x}=2-\dfrac{1}{x(x+1)}$.

3. $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x^2}$,

$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-\ln x\times 2x}{x^4}=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{x-2x\ln x}{x^4}=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1-2\ln x}{x^3}=\dfrac{1-2\ln x-x}{x^3}$.

1\. 5. Primitives et ln

1\. Calculer la dérivée de la fonction *f* définie par $f(x)=\ln\left(\dfrac{3+x}{3-x}\right)$ sur $]0\,;3[$.

2\. a. Déterminer toutes les primitives de la fonction *h* définie par : $h(x)=\dfrac{4x}{(3x^2+2)^3}$.

b. Déterminer la primitive de *h* qui s'annule en 10.

4\. Déterminer une primitive F de chacune des fonctions suivantes qui réponde à la condition posée :

a. $f(x)=\dfrac{x+0,5}{x^2+x+1}$ et $F(1)=0$.

b. $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sin x.\cos x}$ et $F(2)=1$.

4\. Calculer la dérivée de la fonction définie par $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)$.

5\. Trouver une primitive de la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+2x)^3}$.

6\. a. Montrer qu'une primitive de $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ est $x\mapsto\dfrac{(\ln x)^2}{2}$. En déduire l'ensemble des primitives *F* de *f*.

b. Déterminer la primitive de *f* qui s'annule pour $x=1$.

Correction

1\. $f(x)=\ln(u(x))\Rightarrow f'(x)=u'(x)\ln'(u(x))=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x)=\dfrac{3+x}{3-x}$ $u'(x)=\dfrac{1\times(3-x)-(-1)\times(3+x)}{(3-x)^2}=\dfrac{3-x+3+x}{(3-x)^2}=\dfrac{6}{(3-x)^2}$

d'où $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{\frac{6}{(3-x)^2}}{\frac{3+x}{3-x}}=\dfrac{6}{(3-x)^2}\times\dfrac{3-x}{3+x}=\dfrac{6}{(3-x)(3+x)}$.

2\. a. $h(x)=\dfrac{4x}{(3x^2+2)^3}=\dfrac{4}{6}\times\dfrac{6x}{(3x^2+2)^3}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{u'(x)}{u(x)^3}=\dfrac{2}{3}u'(x)u(x)^{-3}$ avec $u(x)=3x^2+2$ et $n-1=-3\Rightarrow n=-2$.

$H(x)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{u(x)^{-2}}{-2}+K=-\dfrac{1}{3u(x)^2}+K=-\dfrac{1}{3(3x^2+2)^2}+K$ (K réel).

b. $H(10)=0\Leftrightarrow -\dfrac{1}{3(3\times10^2+2)^2}+K=0\Leftrightarrow K=\dfrac{1}{3\times302^2}=\dfrac{1}{273612}$ d'où $H(x)=-\dfrac{1}{3(3x^2+2)^2}+\dfrac{1}{273612}$.

4. $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$:

$f(x)=\ln\left(u(x)\right)$ avec $u(x)=\frac{1-x}{x+1}$ et $u'(x)=\frac{-1\times(x+1)-(1-x)\times 1}{(x+1)^2}=\frac{-x-1-1+x}{(x+1)^2}=\frac{-2}{(x+1)^2}$;

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\frac{-2}{(x+1)^2}}{\frac{1-x}{x+1}}=\frac{-2}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{1-x}=\frac{-2}{(1+x)(1-x)}=\frac{2}{(1+x)(x-1)}=\frac{2}{x^2-1}.$$

5. $f(x)=\frac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^3}$. Soit $u(x)=x^2+2x$, on a : $u'(x)=2x+2=2(x+1)$ et

$$f(x)=\frac{x+1}{\left(x^2+2x\right)^3}=\frac{1}{2}\times\frac{2(x+1)}{(x^2+2x)^3}=\frac{1}{2}\times\frac{u'(x)}{u^3(x)}=\frac{1}{2}u'(x)\times u^{-3}(x)$$

qui est de la forme $\frac{1}{2}u'(x)\times u^{n-1}(x)$ avec $n-1=-3$, ou $n=-2$.

Les primitives de telles fonctions sont de la forme :

$$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{u^n(x)}{n}=\frac{1}{2}\times\frac{(x^2+2x)^{-2}}{-2}=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{(x^2+2x)^2}\ \text{(+ constante…)}.$$

6. a. Dérivons $u(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$, $u'(x)=\frac{1}{2}.2.\frac{1}{x}.\ln x=\frac{\ln x}{x}$ donc u est bien une primitive de $\frac{\ln x}{x}$.

Toutes les primitives sont alors de la forme $u(x)+K$.

b. $u(1)+K=0\Leftrightarrow K=-u(1)=-\frac{(\ln 1)^2}{2}=0$.

1. 6. Calcul de limites

1. Soit $f(x)=\frac{\cos(\pi x^2-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}}{x-1}$; calculer $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

2. $f(x)=\ln\left(\frac{ex+3}{x+5}\right)$; calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

3. $f(x)=\ln\left(\frac{x^2+3}{e^x}\right)$; calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+1}{2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Correction

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x^2-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$ avec $\begin{cases}f(x)=\cos(\pi x^2-\frac{\pi}{3})\\ f(1)=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{2\pi}{3})=-\frac{1}{2}\end{cases}$.

On calcule donc $f'(x)=-2\pi x\sin(\pi x^2-\frac{\pi}{3})$ d'où $f'(1)=-2\pi\sin(\pi-\frac{\pi}{3})=-2\pi\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{2\pi\sqrt{3}}{2}=-\pi\sqrt{3}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ex+3}{x+5}=e\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{ex+3}{x+5}\right)=\ln e=1$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x^2+3}{e^x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x^2+3)-\ln e^x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)\right)-x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln x^2+\ln\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)-x\right]$,

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right) = \ln 1 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x^2 - x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2\ln x - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2\dfrac{\ln x}{x}-1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x+1}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x} = 0$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to 0+}\dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$ d'après le cours.

1. 7. Résolution (in)équations

1. Résoudre l'équation : $\ln(x^2-3x-2) = \ln(2x-6)$.

2. Résoudre l'inéquation : $e^{2\ln\left(\frac{1}{x}\right)+1} > 2e$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système : $\begin{cases}\ln x - \ln y = 1\\ x+y = 2e\end{cases}$.

4. Résoudre l'inéquation : $\ln(1+x)-\ln(1-x) > \ln 2x - \ln(1+x)$.

5. Résoudre : $1 + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$.

6. Résoudre : $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$.

Correction

1. Domaine de définition : $D_1 = \left]-\infty\,;\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right[\cup\left]\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\,;+\infty\right[$, par ailleurs $2x - 6 > 0$ si et seulement si x > 3. On a donc $D_f = D_1\cap]3\,;+\infty[= \left]\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\,;+\infty\right[$ car $\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\approx 3,56$.

Pour la résolution : ln a = ln b équivaut à a = b donc, l'équation devient : $x^2-3x-2 = 2x-6$ ou encore $x^2-5x+4=0$ d'où les solutions 1 et 4 ; mais seule 4 est valable.

2. Domaine de définition : il faut que $x > 0$, soit $D_f =]0\,;+\infty[$.

$e^{2\ln\left(\frac{1}{x}\right)+1} > 2e \Leftrightarrow e^{-2\ln x+1} > 2e \Leftrightarrow -2\ln x + 1 > \ln(2e) \Leftrightarrow -2\ln x > \ln 2 + \ln e - 1 \Leftrightarrow \ln x < -\dfrac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow x < e^{-\frac{\ln 2}{2}}$. On peut simplifier un peu : $e^{-\frac{1}{2}\ln 2} = \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et finalement $S = \left]0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$.

3. $\begin{cases}\ln x - \ln y = 1\\ x+y=2e\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\ln\dfrac{x}{y} = \ln e\\ x+y=2e\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = ye\\ ye+y=2e\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y = \dfrac{2e}{1+e}\\ x = \dfrac{2e^2}{1+e}\end{cases}$. Les deux solutions sont positives donc c'est bon.

4. Attention à l'ensemble de définition : $1+x>0, 1-x>0, 2x>0 \Rightarrow x>-1, x<1, x>0 \Rightarrow x\in\left]0\,;1\right[$.

On a alors $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) > \ln\left(\dfrac{2x}{1+x}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{2x}{1+x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+2x+x^2-2x+2x^2}{(1-x)(1+x)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{1+3x^2}{(1-x)(1+x)} > 0$.

Le numérateur et le dénominateur sont positifs sur]0 ; 1[, la solution est donc l'intervalle]0 ; 1[.

5. $1 + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3)$: il faut que $x > -3$ et que $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3) > 0$ (à l'extérieur des racines) donc $D =]-3\ ;\ +\infty[$.

$1 + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3) \Leftrightarrow \ln e + \ln(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3) \Leftrightarrow \ln e(x + 3) = \ln(x^2 + 2x - 3) \Leftrightarrow$ $e(x + 3) = x^2 + 2x - 3$.

ln est une bijection : $x^2 + (2 - e)x - 3(1 + e) = 0$,

$\Delta = (2 - e)^2 + 12(1 + e) = 4 - 4e + e^2 + 12 + 12e = e^2 + 8e + 16 = (e + 4)^2$.

$x = \dfrac{-(2-e) \pm (e+4)}{2}$, $x_1 = -3 \notin D$ ou $x_2 = e + 1 \in D$. $S = \{e + 1\}$.

6. $\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x)$

Il faut que $x^2 - 4e^2 > 0$ et que $3x > 0$ i.e. $x > 0$ et $x^2 > 4e^2$ c'est-à-dire $(x > 0)$ et $(x > 2e$ ou $x < -2e)$.

$D =]2e\ ;\ +\infty[$.

$\ln(x^2 - 4e^2) < 1 + \ln(3x) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) < \ln e + \ln(3x) \Leftrightarrow \ln(x^2 - 4e^2) < \ln(3ex) \Leftrightarrow x^2 - 4e^2 < 3ex \Leftrightarrow$ (E) $x^2 - 3ex - 4e^2 < 0$.

$\Delta = 9e^2 + 16e^2 = 25e^2 = (5e)^2$, $x = \dfrac{3e \pm 5e}{2}$; (E) $\Leftrightarrow -e < x < 4e$. $S =]2e\ ;\ 4e[$.

1. 8. Avec ROC

1. La fonction g est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = 2x\sqrt{x} - 3\ln x + 6$.

En utilisant les variations de g, déterminer son signe suivant les valeurs de x.

2. La fonction numérique f est définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1 .$$

a. **Démonstration de cours** : au choix

- démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

ou bien

- démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et $+\infty$ (en $+\infty$, on pourra poser $X = \sqrt{x}$).

c. Utiliser la première partie pour déterminer le sens de variation de f.

3. Soit Δ la droite d'équation $y = x - 1$ et C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé du plan. Montrer que Δ est asymptote de C et étudier leurs positions relatives. construire C et Δ.

Correction

1. $g'(x) = 2\sqrt{x} + 2x\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 3\dfrac{1}{x} = \dfrac{4x + 2x}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x} = \dfrac{3x}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x} = 3\dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$.

On a alors $x^2 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 \geq x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ car x est positif.

Conclusion g est décroissante avant 1, croissante après ; on a un minimum en 1 qui vaut $g(1)=2+0+6=8$ et est positif. Finalement $g(x)$ est toujours positive.

2. $f(x) = \dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}} + x - 1$

a. No comment.

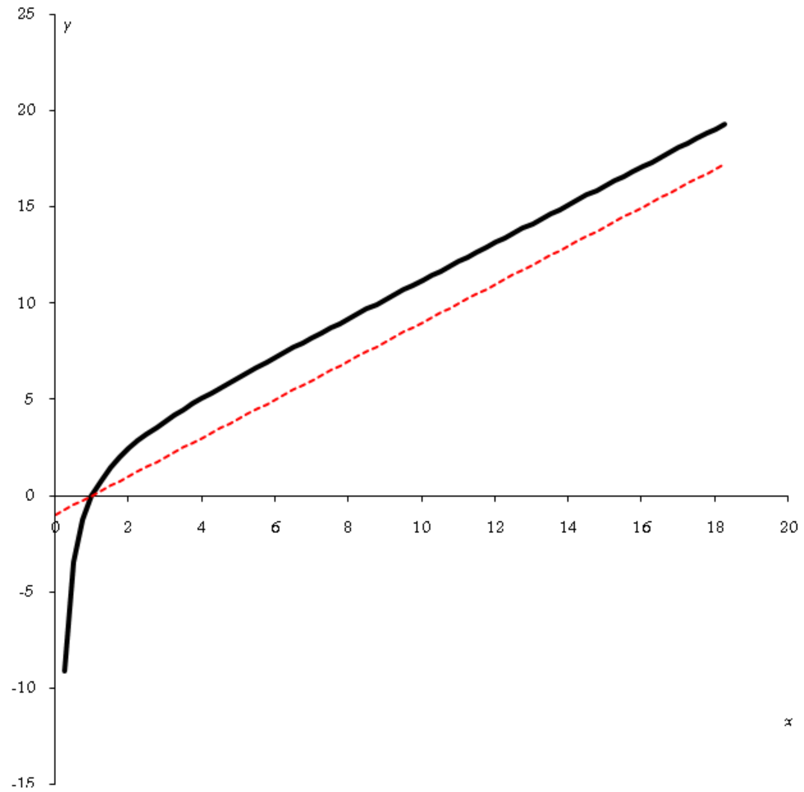
b. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, si on pose $X = \sqrt{x}$, cela nous donne $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X^2}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} 2\dfrac{\ln X}{X} = 0$.

En 0, $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers $+\infty$ donc $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ tend vers $-\infty$ ainsi que f.

c. $f'(x)=3\dfrac{\dfrac{1}{x}\sqrt{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}+1=3\dfrac{\dfrac{2}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}+\dfrac{x}{x}=\dfrac{\dfrac{3(2-\ln x)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{x}=\dfrac{6-3\ln x+2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

Donc *f'* est du signe de *g* et donc toujours positive, *f* est donc croissante.

3. On a $f(x)-(x-1)=\dfrac{3\ln x}{\sqrt{x}}$ qui tend vers 0 à l'infini et qui est positif (C au-dessus de Δ) lorsque $x>1$, négatif lorsque $x<1$ (C en dessous de Δ) .



1. 9. Dérivation et encadrement

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 3 cm).

1. On considère la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$

Montrer que *f* est continue en 0.

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction *g* définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}^+$: $\ln(1+x)\le\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

b. Par une étude analogue, montrer que si $x\ge 0$, alors $\ln(1+x)\ge x-\dfrac{x^2}{2}$.

c. Établir que pour tout x strictement positif on a $-\dfrac{1}{2}\le\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\le-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}$.

En déduire que *f* est dérivable en zéro et que $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$

3. a. Soit h la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$.

Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0,+\infty[$.

b. Montrer que sur $[0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}$.

c. Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$

d. On désigne par C la représentation graphique de f. Construire la tangente T à C au point d'abscisse 0. Montrer que C admet une asymptote. Tracer la courbe C.

Correction

1. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$; f est continue en 0 ssi $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, or le cours donne justement la limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

2. a. $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\left(1-x+x^2\right)=\dfrac{1-1-x+x+x^2-x^2-x^3}{1+x}=\dfrac{-x^3}{1+x}\leq 0$. Donc g est décroissante et comme $g(0)=0$, on a également $g(x)\leq 0$, soit $\ln(1+x)\leq\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)$.

b. On prend $k(x)=\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}\Rightarrow k'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1+x=\dfrac{1-1-x+x+x^2}{1+x}=\dfrac{x^2}{1+x}\geq 0$ et $k(0)=0$ donc $k(x)\geq 0$, soit $\ln(1+x)\geq x-\dfrac{x^2}{2}$.

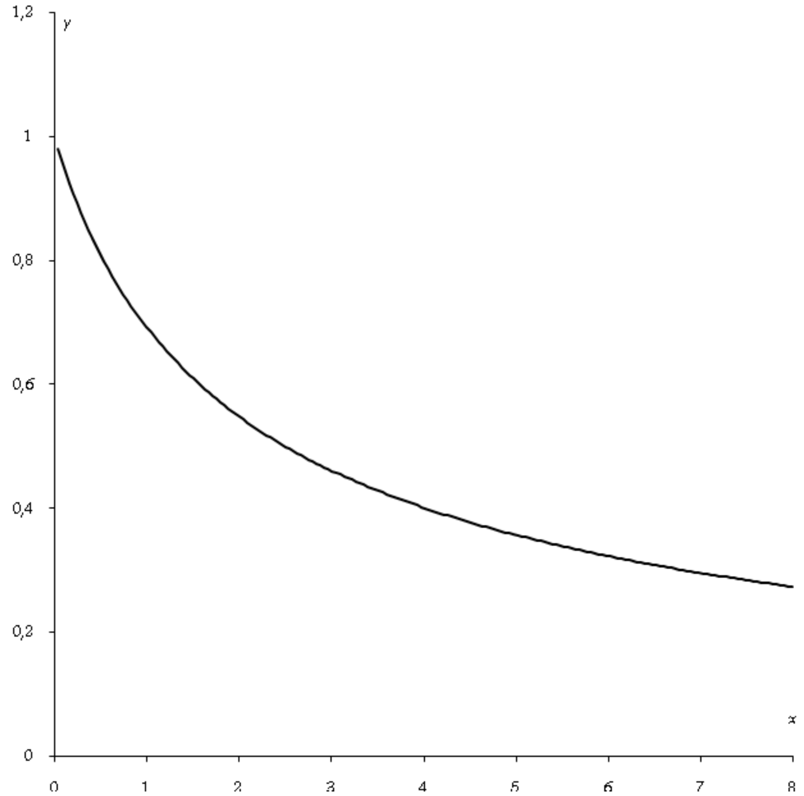
c. $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\geq\ln(1+x)\geq x-\dfrac{x^2}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\geq\ln(1+x)-x\geq-\dfrac{x^2}{2}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}\leq-\dfrac{1}{2}$.

f dérivable en zéro : on calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$; or le résultat précédent montre que cette limite est précisément $-\dfrac{1}{2}$ qui est donc $f'(0)$.

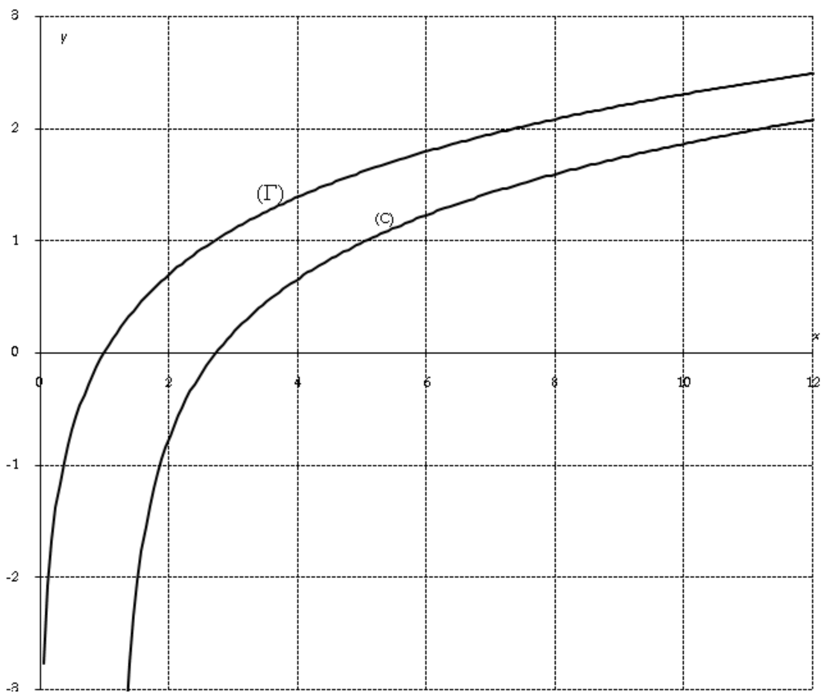
3. a. $h(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)$, $h'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1-x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{-x}{(x+1)^2}\leq 0$; on a $h(0)=0$ et h décroissante donc $h(x)\leq 0$.

b. $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{1+x}x-\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{h(x)}{x^2}\leq 0$.

c. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\sim\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.



1. 10. Fonction+équation, Am. Nord 06/2008, 6 pts



Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{\ln x}$.

On nomme (C) la courbe représentative de f et (Γ) la courbe d'équation $y=\ln x$ dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction *f* et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.

2. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$. Interpréter graphiquement cette limite.

b. Préciser les positions relatives de (C) et de (Γ).

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point *O*.

a. Soit *a* un réel appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$. Démontrer que la tangente T_a à (C) au point d'abscisse *a* passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a)-af'(a)=0$.

Soit *g* la fonction définie sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$ par $g(x)=f(x)-xf'(x)$.

b. Montrer que sur $]1\,;+\infty[$, les équations $g(x)=0$ et $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ ont les mêmes solutions.

c. Après avoir étudié les variations de la fonction *u* définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t)=t^3-t^2-t-1$, montrer que la fonction *u* s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point *O*.
La courbe (C) et la courbe (Γ) sont données ci-dessus. Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

4. On considère un réel *m* et l'équation $f(x)=mx$ d'inconnue *x*.

Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel *m*, le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle]1 ; 10].

<u>Correction</u>

1. On a $f=u-\dfrac{1}{u}$, avec $u(x)=\ln x$, dérivable et qui ne s'annule pas sur $]1\,;\,+\infty[$. Donc *f* est dérivable sur $]1\,;\,+\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]1\,;\,+\infty[$.

$f'=u'-\left(\dfrac{1}{u}\right)'=u'-\dfrac{-u'}{u^2}=u'+\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x)=\dfrac{1}{x}$. Donc $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{(\ln x)^2}\right)$.

Comme $x>1$, $\dfrac{1}{x}>0$ et $1+\dfrac{1}{(\ln x)^2}>0$, c'est-à-dire $f'(x)>0$. *f* est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(\ln x)=0^+$ d'où $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{(\ln x)}=+\infty$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=-\infty$ (par somme des limites).

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{(\ln x)}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ (par somme des limites).

2. a. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{\ln x}\right)=0$. Les courbes (C) et (Γ) sont asymptotes en $+\infty$.

b. $f(x)-\ln x=-\dfrac{1}{\ln x}$; or, pour $x>1$, $\ln x>0$; donc $f(x)-\ln x<0$, (C) est en dessous de (Γ).

3. a. T_a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)=f'(a)x+(f(a)-af'(a))$; T_a passe par l'origine du repère si $0=f'(a)\times0+f(a)-af'(a)\Leftrightarrow f(a)-af'(a)=0$.

b. $g(x)=0$ équivaut à $f(x)-xf'(x)=0$; or $f'(x)=\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{(\ln x)^2}\right)$ et $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{\ln x}$, soit :

$$\ln x-\frac{1}{\ln x}-x\times\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{(\ln x)^2}\right)=0\Leftrightarrow\ln x-\frac{1}{\ln x}-1-\frac{1}{(\ln x)^2}=0\Leftrightarrow\frac{(\ln x)^3-\ln x-(\ln x)^2-1}{(\ln x)^2}=0\,.$$

Par conséquent les équations $g(x)=0$ et $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$ ont les mêmes solutions.

c. $u'(t)=3t^2-2t-1=(t-1)(3t+1)$. $u'(t)\geq 0$ pour t appartenant à $\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}\right]\cup\left[1\,;\,+\infty\right[$ et $u'(t)\leq 0$ pour t appartenant à $\left[-\frac{1}{3}\,;\,1\right]$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

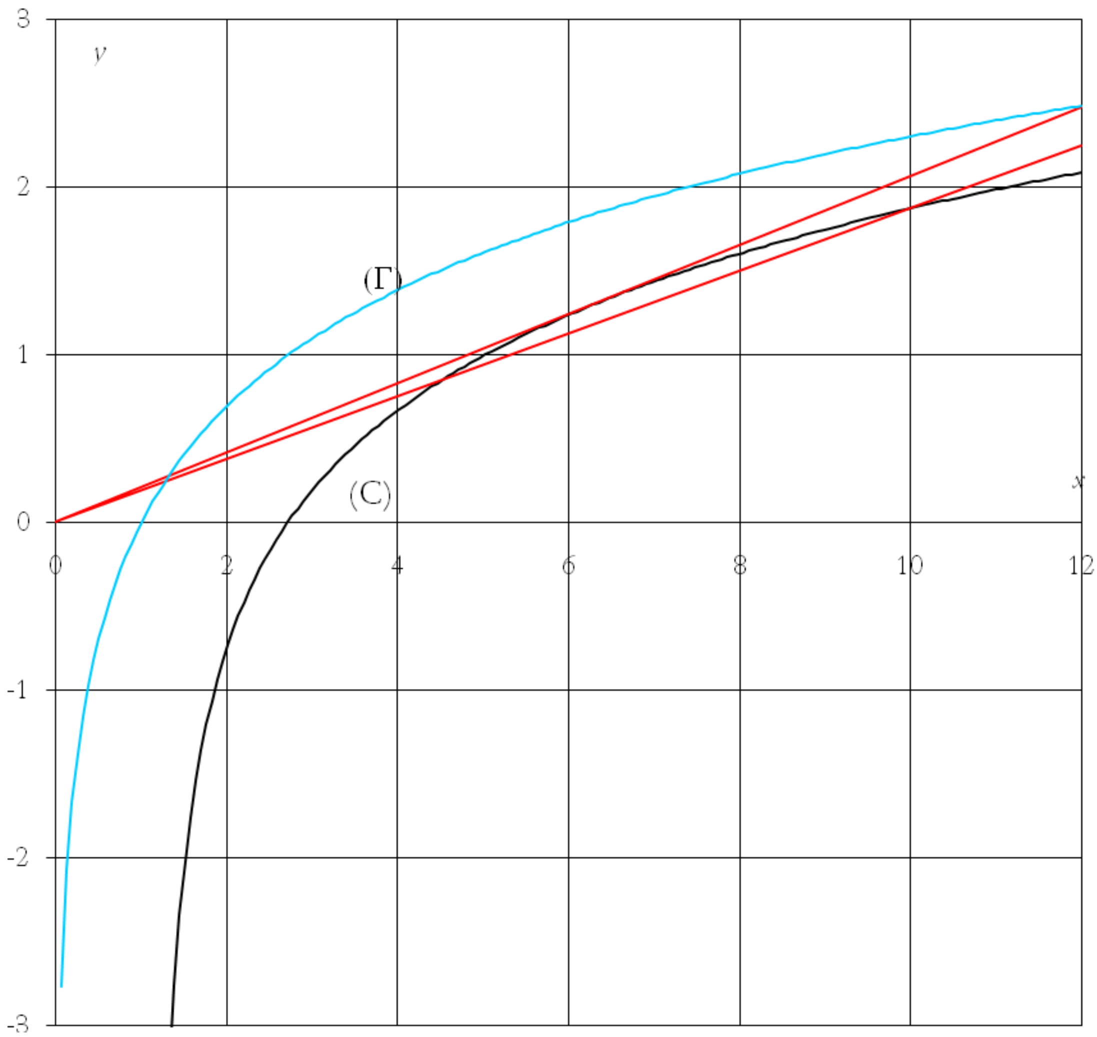
Avant 1 le maximum de u est négatif ; après 1, u passe de -2 à $+\infty$, on en déduit que la fonction u s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.

d. T_a passe par l'origine du repère si $(\ln x)^3-\ln x-(\ln x)^2-1=0$, c'est-à-dire si $u(\ln x)=0$. Or la question 3. c. prouve que cette équation n'admet qu'une solution, que l'on notera a_0, sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $a_0\approx 6{,}29$: il n'existe qu'une seule tangente à (C) passant par l'origine du repère.

4. Par lecture graphique : résoudre $f(x)=mx$ revient à chercher l'intersection entre (C) et les droites passant par l'origine et de pente m ; on a donc pour $1\leq x\leq 10$ et $m_0=\frac{f(10)}{10}$:

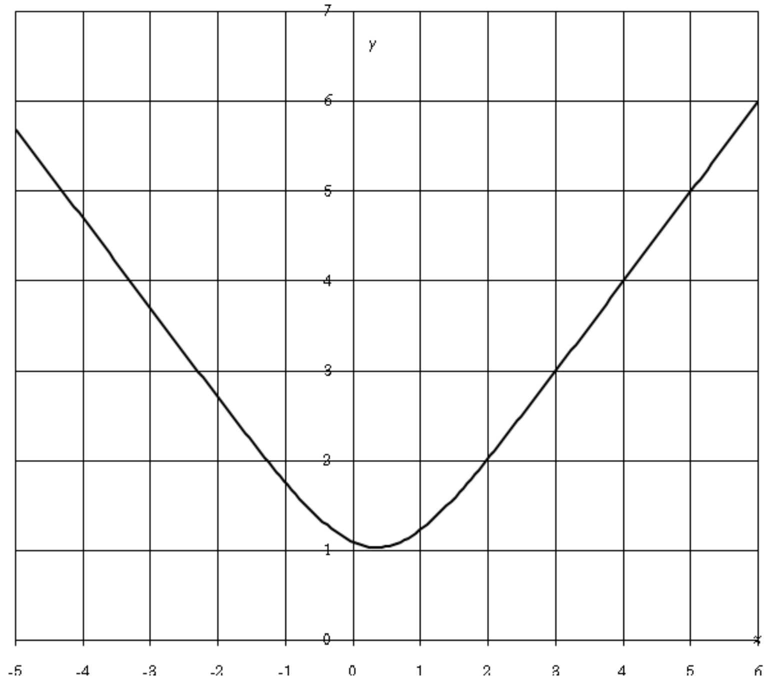
- si $m\leq m_0$ l'équation $f(x)=mx$ admet une seule solution ;
- si $m_0\approx 0{,}187\leq m\leq f'(a_0)\approx 0{,}2$ l'équation $f(x)=mx$ admet deux solutions ;
- si $m>f'(a_0)$ l'équation $f(x)=mx$ n'admet aucune solution.



1. 11. Ln et exp+intégrale Polynésie 09/2008 6 pts

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(e^{x}+2e^{-x}\right)$.

La courbe (C) représentative de la fonction *f* dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



Partie A - Étude de la fonction *f*

1. Montrer que, pour tout réel *x*, $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$.

On admet que, pour tout réel *x*, $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$.

2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

Étudier la position relative de (C) et de (d).

3. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d') d'équation $y=-x+\ln 2$ est asymptote à (C).

4. Étudier les variations de la fonction *f*. Montrer que le minimum de la fonction *f* est égal à $\frac{3}{2}\ln 2$.

5. Tracer les droites (d) et (d') sur la figure.

Partie B - Encadrement d'une intégrale

On pose $I=\int_2^3\left[f(x)-x\right]dx$.

1. Donner une interprétation géométrique de *I*.
2. Montrer que, pour tout $X\in\left[0\,;+\infty\right[$, $\ln(1+X)\le X$.

En déduire que $0\le I\le\int_2^3 2e^{-2x}dx$ et donner un encadrement de *I* d'amplitude 0,02.

<u>Correction</u>

Partie A

1. $f(x)=\ln\left(e^x+2e^{-x}\right)=\ln\left(e^x\left(1+2e^{-2x}\right)\right)=\ln e^x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)$.

Remarque : si on met en facteur e^{-x} à la place de e^x , on a $f(x)=-x+\ln\left(2+e^{2x}\right)$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=+\infty+\ln(1+2\times0)=+\infty$;

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+2e^{-2x}\right)=\ln(1+2\times0)=0$: la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

3. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x+\ln\left(2+e^{2x}\right) = +\infty+\ln(2+0) = +\infty$;

$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(2+e^{2x}\right) = \ln 2 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)-(-x+\ln 2) = 0$: la droite (d') $y=-x+\ln 2$ est asymptote à (C).

4. $f'(x) = \dfrac{e^x-2e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}$; $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x}\geq 2 \Leftrightarrow 2x\geq \ln 2 \Leftrightarrow x\geq \dfrac{1}{2}\ln 2$.

$f\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}\ln 2}+2e^{-\frac{1}{2}\ln 2}\right) = \ln\left(\left(e^{\ln 2}\right)^{1/2}+2\left(e^{\ln 2}\right)^{-1/2}\right) = \ln\left(2^{1/2}+2^{1}2^{-1/2}\right) = \ln\left(2\times 2^{1/2}\right) = \ln\left(2^{3/2}\right)$.

Partie B - Encadrement d'une intégrale

1. I représente l'aire comprise entre (C), la droite ($y=x$), les droites $x=2$ et $x=3$.

2. $\ln(1+X)\leq X \Rightarrow \ln\left(1+2e^{-2x}\right)\leq 2e^{-2x}$ car $2e^{-2x}>0$. Par ailleurs on a $f(x)\geq x \Rightarrow I\geq 0$.

$I=\int_2^3\left[f(x)-x\right]dx = \int_2^3 \ln\left(1+2e^{-2x}\right)dx \leq \int_2^3 2e^{-2x}dx = \left[\dfrac{2}{-2}e^{-2x}\right]_2^3 = -e^{-6}+e^{-4}\approx 0{,}015$; 0,01 est une estimation de I d'amplitude 0,02.

1. 12. Sommes partielles série harmonique, N. Calédonie 2007

7 points

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n}\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\ldots+\dfrac{1}{2n}$.

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle]0 ; $+\infty$ [par : $f(x) = \dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1. a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\dfrac{1}{n+1}\leq \int_n^{n+1}\dfrac{1}{x}dx \leq \dfrac{1}{n}$.

b. Vérifier que $\int_n^{n+1}\dfrac{1}{x}dx = \dfrac{1}{n}-f(n)$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0\leq f(n)\leq \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{1}{2n(2n+1)}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0\leq f(n)+f(n+1)+\ldots+f(2n)\leq S_n$.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}.$$

c. En déduire l'égalité $S_n = \dfrac{n+1}{n(2n+1)}$.

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n).$$

e. Vérifier que pour tout entier $n > 1$, $f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$.

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Correction

$$u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

PARTIE A

1. $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2}\right) - \left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{2n}\right) = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n+2} - \dfrac{1}{n}$ d'où

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. La suite (u_n) est décroissante puisque $-3n-2 < 0$.

3. La suite est positive puisque somme de termes positifs ; elle est décroissante et minorée, elle converge bien.

PARTIE B

1. a. $n \le x \le n+1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{n+1} \le \dfrac{1}{x} \le \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} \le \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}dx \le \dfrac{1}{n}$.

b. $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}dx = [\ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$;

par ailleurs $\dfrac{1}{n} - f(n) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n} - \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ car $\ln\dfrac{a}{b} = -\ln\dfrac{b}{a}$.

c. Comme $\dfrac{1}{n+1} \le \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}dx \le \dfrac{1}{n}$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \le \frac{1}{n} - f(n) \le \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \le -f(n) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le f(n) \le \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

2. a. Comme

$$0 \le f(n) \le \frac{1}{n(n+1)},$$

$$0 \le f(n+1) \le \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$\ldots,$$

$$0 \le f(2n) \le \frac{1}{2n(2n+1)},$$

on somme toutes ces inégalités et on obtient :

$$0 \le f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) \le \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)} = S_n.$$

b. On a déjà le résultat au 1.c. : $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$ …

c. On remplace donc dans $S_n=\sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}$ car tous les termes intermédiaires s'éliminent ; $S_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n+1-n}{n(2n+1)}=\frac{n+1}{n(2n+1)}$.

d. S_n tend vers 0 en $+\infty$; grâce aux « gendarmes » $f(n)+f(n+1)+\ldots+f(2n)$ tend également vers 0.

e. $u_n=\sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$;

$$\begin{aligned}f(n)+f(n+1)+\ldots+f(2n)&=\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)+\ldots+\frac{1}{2n}+\ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ln\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\ldots\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right]\\&=u_n+\ln\left[\frac{n}{2n+1}\right]=u_n-\ln\left[\frac{2n+1}{n}\right]=u_n-\ln\left[2+\frac{1}{n}\right].\end{aligned}$$

Les logarithmes se simplifient car tous les termes du produit à l'intérieur du crochet s'éliminent.

f. On sait déjà que $f(n)+f(n+1)+\ldots+f(2n)$ tend vers 0 ; le logaritheme tend vers ln2 donc u_n tend vers ln2.

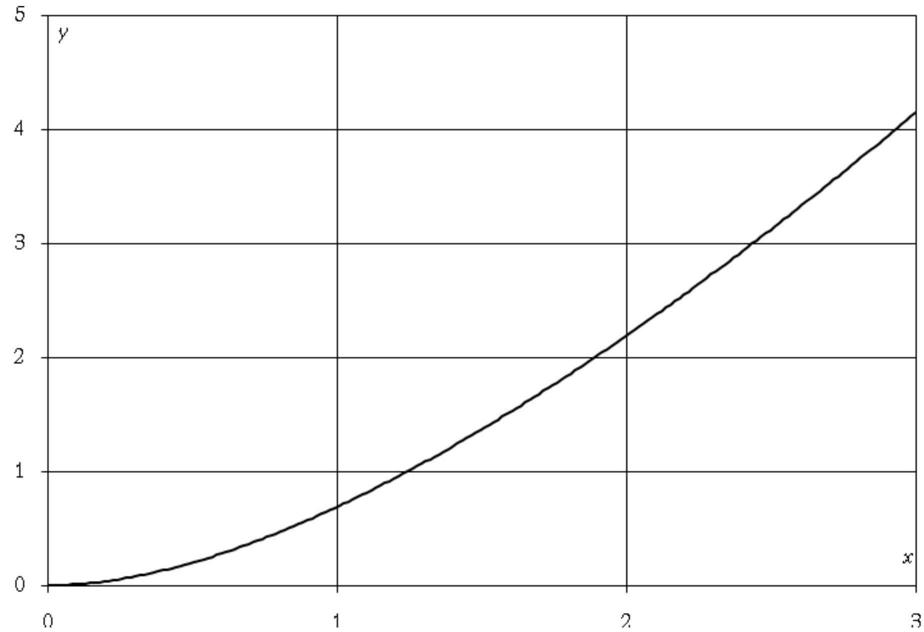
1. 13. Fonction+aire+suite, Liban 2006

7 points

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.

Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(O;\vec{u},\vec{v})$ est donnée ci-dessous.



1. a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b. L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

2. On pose $I=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$.

a. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \neq -1$, $\frac{x^2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

b. Calculer I.

3. À l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et $y = 0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0 ; 1]$. On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=\int_0^1 x^n \ln(x+1)dx$.

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \le u_n \le \frac{\ln 2}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Correction

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(x+1)$.

1. a. $f'(x)=\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$; sur $[0;+\infty[$ les deux termes $\ln(1+x)$ et $\frac{x}{1+x}$ sont positifs donc f est croissante sur cet intervalle.

b. La tangente en O a pour équation $y=(\ln 1+0)(x-0)+0=0$ donc l'axe des abscisses est tangent à (C) au point O.

2. a. $\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2-1}{x+1}+\frac{1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$.

b. $I=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx=\int_0^1 x-1+\frac{1}{x+1}dx=\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln|x+1|\right]_0^1=-\frac{1}{2}+\ln 2$.

3. $\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\right]_0^1-\int_0^1 \frac{1}{2}x^2\frac{1}{1+x}dx=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}I=\frac{1}{4}$.

4. La fonction f est continue, monotone strictement croissante et donc bijective de $f(0)=0$ vers $f(1)=\ln 2 \approx 0,69$; comme $0,25 \in [0;\ln 2]$, 0,25 a un unique antécédent dans $[0 ; 1]$. On obtient

x	$f(x)$
0,56020942	0,24919239
0,56544503	0,25341558

d'où $\alpha \approx 0,56$.

Partie B : étude d'une suite

1. $u_{n+1}-u_n=\int_0^1 x^{n+1}\ln(x+1)dx-\int_0^1 x^n\ln(x+1)dx=\int_0^1 x^n(x-1)\ln(x+1)dx$; comme $(x-1)$ est négatif et que les autres termes sont posititfs sur $[0 ; 1]$, l'intégrale est négative et (u_n) est décroissante. Par ailleurs il est évident que (u_n) est positive donc (u_n) décroissante, minorée par 0 converge.

2. On a $\ln(x+1) < \ln 2$ sur [0 ; 1] donc $u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx \leq \int_0^1 x^n \ln 2 dx = \ln 2\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{n+1}$.

On a donc bien $0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$. Comme $\frac{\ln 2}{n+1}$ tend vers 0 à l'infini, la suite converge vers 0.

1. 14. Logarithme+ expo+ acc finis

Partie A

Le but de cette partie est d'étudier la fonction f définie sur]0 ; $+\infty$ [par

$$f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}.$$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction auxiliaire g définie sur]0 ; $+\infty$ [par $g(x) = x^2 + 2 + 2\ln x$.

a. Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

b. En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de]0 ; $+\infty$ [.

2. a. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à Δ.

d. Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente T parallèle à Δ.

e. Tracer (C), Δ et T dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

3. Calculer, en cm², l'aire du domaine plan limité par Δ, la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0. Prouver que $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer une valeur approchée de x_0.

On désigne par h la fonction définie sur]0 ; $+\infty$ [par $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Montrer que x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

2. On note I l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\ ;\ 1\right]$. Montrer que, pour tout x appartenant à I, $h(x)$ appartient aussi à I.

3. a. Calculer la dérivée h' de h et la dérivée seconde h'' de h.

b. Étudier les variations de h' sur I.

c. En déduire que, pour tout x de I, on a $|h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$.

4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

b En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leq e^{-1/2}|u_n - \alpha|$.

c. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{2}e^{\frac{-n}{2}}$.

5. a. Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, on ait : $\frac{1}{2}e^{\frac{-n}{2}} < 10^{-2}$.

b. Montrer que : $\left|u_{n0}-x_0\right|\leq 10^{-2}$. Que représente u_{n_0} relativement à x_0 ? Calculer u_{n_0} à 10^{-2} près par défaut.

Correction

Partie A

1. a. $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(x^2-1)}{x}=\dfrac{2}{x}(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$	-1	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$ 0 $+$		$-$	0	$+$	
$g(x)$				↘	3	↗	

$g(1) = 1^2 + 2 - 2 \times 0 = 3$.

b. 3 est un minimum de la fonction g sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc la fonction g est positive quel que soit x.

2. a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+\dfrac{2\ln x}{x})=\lim\limits_{x\to 0^+} x+2\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{X}}{\frac{1}{X}}=\lim\limits_{X\to+\infty}(-X\ln X)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\dfrac{2\ln x}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty} x+2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

b. $f'(x)=1+\dfrac{2\times\frac{1}{x}\times x-2\ln x\times 1}{x^2}=\dfrac{x^2+2-2\ln x}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$ du signe de $g(x)$, c'est à dire positif !

f est donc strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

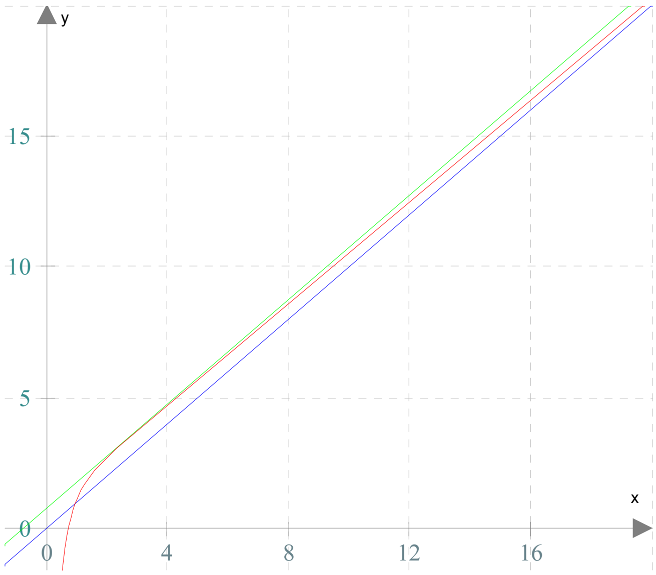
x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

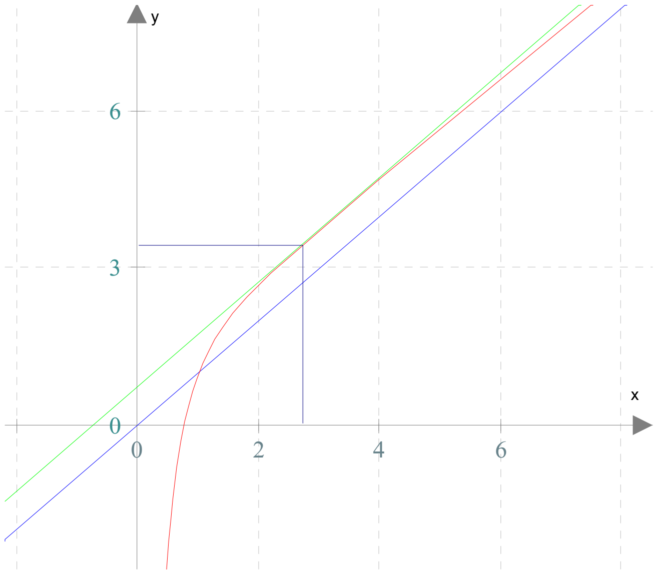
c. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{x}=0^+$, donc la droite d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe. Lorsque $x < 1$ la courbe est en dessous de Δ, lorsque $x > 1$, la courbe est au-dessus.

d. (C) admet en A une tangente de coefficient directeur 1 ssi $f'(x_A)=1$:

$f'(x_A)=1\Leftrightarrow\dfrac{g(x_A)}{{x_A}^2}=1\Leftrightarrow {x_A}^2+2-2\ln x_A={x_A}^2\Leftrightarrow 2-2\ln x_A=0\Leftrightarrow 2\ln x_A=2\Leftrightarrow\ln x_A=1\Leftrightarrow x_A=e$;

$f(x_A)=f(e)=e+\dfrac{2\ln e}{e}=e+\dfrac{2}{e}\approx 3,45$.





3. Il faut calculer $\int_1^e (f(x)-x)dx = 2\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$; or $\frac{1}{x}$ est la dérivée de ln x, donc on a quelque chose de la forme $u'.u$ dont une primitive est $\frac{1}{2}u^2$: $\int_1^e (f(x)-x)dx = 2\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = 2\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = 2\left[\frac{1}{2}-0\right] = 1$.

4. La fonction f est continue, strictement croissante, sur $]0\,;\,+\infty[$, c'est donc une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. Il existe bien une valeur x_0 appartenant à $]0\,;\,+\infty[$ telle que $f(x_0) = 0$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - 4\ln 2 < 0 \text{ et } f(1) = 1 + \frac{2\ln 1}{1} = 1 > 0 \text{ donc } \frac{1}{2} \le x_0 \le 1.$$

1. 15. Logarithme+primitive

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et d'en déterminer une primitive.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$.

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f.

2. Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α , appartient à $[-0{,}72 ; -0{,}71]$.

3. Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $]-1 ; +\infty[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble D = $]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1. Étude de g aux bornes de son ensemble de définition.

a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

b. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

2. Sens de variation de g

a. Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.

b. Montrer que $g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha \approx -0{,}715$.

3. Tableau et représentation graphique de g.

a. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

4. Calcul d'une primitive de g :

Soit h la fonction définie sur D par : $h(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}-\dfrac{1}{x(x+1)}$.

a. Déterminer des fonctions u et v telles que l'on puisse écrire $h(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$ et en déduire une primitive de h.

b. Après avoir vérifié que $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$, déterminer une primitive de $\dfrac{1}{x(x+1)}$.

c. Déduire des questions précédentes, une primitive de g.

Correction

Partie A

$f(x)=\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$, $D_f =]-1 ; +\infty[$.

1. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables : en effet, $u: x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ est dérivable sur D_f et $v: x \mapsto x+1 = y \mapsto -2\ln y$ est dérivable sur D_f.

$f'(x)=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}-2\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1-2(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{-2x-1}{(x+1)^2}$.

2. $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow -2x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -\dfrac{1}{2}$.

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$-\infty$ ↗	$f(-1/2)$	↘	$-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>1}} \dfrac{x-2(x+1)\ln(x+1)}{x+1}=-\infty$ car $\lim\limits_{X\to 0} X\ln X=0^-$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\ln(x+1)=-\infty$.

$f(-1/2)=\dfrac{-1/2}{1/2}-2\ln\dfrac{1}{2}=-1+2\ln 2\approx 0,39$, $f(0)=0$.

3. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-1\,;\,-1/2[$ et $f(x)$ change de signe sur cet intervalle ; il existe donc un nombre α de $]-1\,;\,-1/2[$ tel que $f(\alpha)=0$.

$f(-0,71)\approx 0,027$ et $f(-0,72)\approx -0,025$ donc $-0,72<\alpha<-0,71$.

Signe de $f(x)$:

x	-1		α		0	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Partie B

$g(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$, D $=\,]-1\,;\,0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

1. a. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\ln(x+1)}{x}\times\dfrac{1}{x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

De même $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln(x+1)}{x}\times\dfrac{1}{x}=+\infty$.

b. $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{(x+1)}\times\dfrac{x+1}{x^2}=0$ car $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=0$.

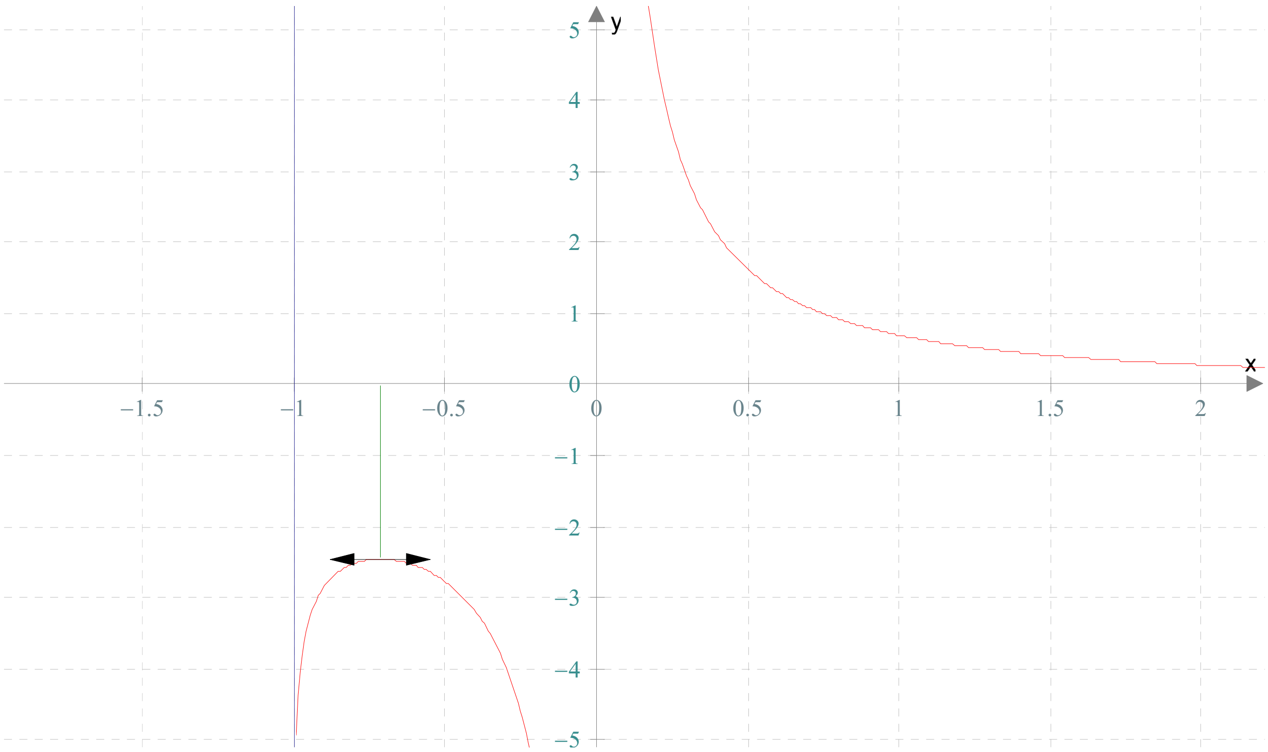
2. a. $g'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x+1}\times x^2-\ln(x+1)\times 2x}{x^4}=\dfrac{\dfrac{x}{x+1}-2\ln(x+1)}{x^3}=\dfrac{f(x)}{x^3}$.

x	-1		α		0	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
x^3		$-$		$-$		$+$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$-$

b. $g(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}$; or on sait que $f(\alpha)=0$ donc $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}-2\ln(\alpha+1)=0\Leftrightarrow \ln(\alpha+1)=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}$.

On déduit que $g(\alpha)=\dfrac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}=\dfrac{\alpha}{2(\alpha+1)}\times\dfrac{1}{\alpha^2}=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}\approx -2,455$.

x	-1		α		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$		$-\infty$ ↗		↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘	0



4. a. $h(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}-\frac{1}{x(x+1)}$. $u=\ln(x+1),\ u'=\frac{1}{x+1},\ v'=\frac{1}{x^2},\ v=-\frac{1}{x}\Rightarrow h=uv'+u'v$.

La fonction $uv=-\frac{\ln(x+1)}{x}$ est une primitive de h.

b. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)-x}{x(x+1)}=\frac{1}{x(x+1)}$ donc la fonction $\ln(x)-\ln(x+1)$ est une primitive de $\frac{1}{x(x+1)}$.

c. Une primitive de la fonction $g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}=h(x)+\frac{1}{x(x+1)}$ est $-\frac{\ln(x+1)}{x}+\ln x-\ln(x+1)$.

1. 16. Logarithme

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\text{ si } x>0 \text{ et } f(0)=0.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique : 5 cm).

Le but du problème est d'étudier certaines propriétés de la fonction f.

Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$ par : $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x^2+1}$.

1. Calculer la dérivée g' de g. Montrer que pour tout x de $]0\,;\,+\infty\,[$, $g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.

2. Etudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x. Déterminer la limite de g en $+\infty$. Déterminer la limite de g en 0.

3. Dresser le tableau des variations de g.

4. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha>0$ tel que $g(\alpha)=0$. Vérifier que $0,5<\alpha<0,6$. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty\,[$.

On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g.

Partie B : Etude de la fonction *f*

1. a. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $xf(x)$ (on pourra poser $X=\frac{1}{x^2}$).

b. En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, on a $f'(x)=g(x)$. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Etude de f en 0

a. Montrer que $x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs suprieures. Que peut-on en conclure ?

b. Etudier la dérivabilité de f en 0.

c. Préciser la tangente à la courbe de f au point O.

3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

4. Donner l'allure de (C).

Correction

1. a. g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. En effet, $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables, de même que $-\frac{2}{x^2+1}$.

$$g'(x)=\frac{-\frac{2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\frac{-2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}}+\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{2}{x\left(x^2+1\right)}+\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2\left(x^2+1\right)+4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2(x^2-1)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

b. Le signe de g'(x) est celui de $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Comme g' est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

si $0<x<1$, $g'(x)$ est négatif ;

si $x>1$, $g'(x)$ est positif.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\ln 1=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2+1}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

3. $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ avec $X=1+\frac{1}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x^2+1}=2$ donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

4. a.

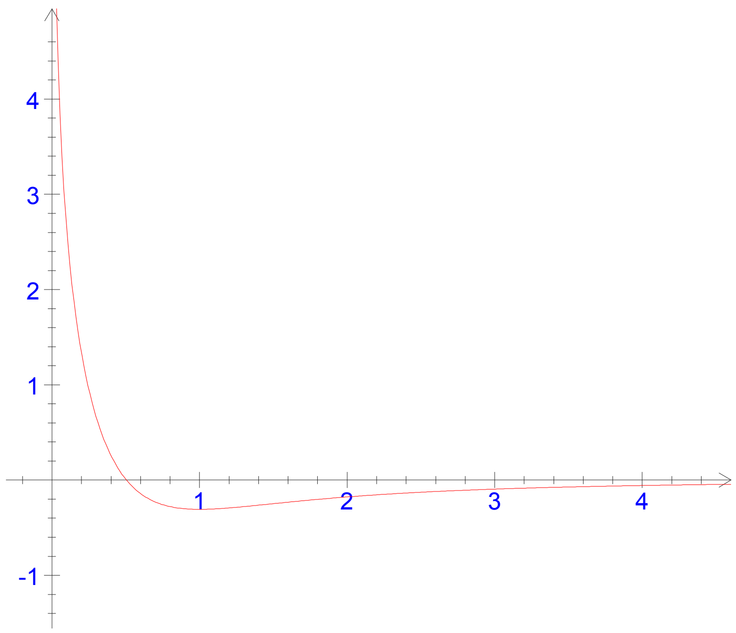
x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-0,3$	$\nearrow$	0 0

$g(1)=\ln(1+\frac{1}{1^2})-\frac{2}{1^2+1}=\ln 2-1\approx -0,3$.

4. b. La fonction est continue et dérivable sur $]0\,;1]$, de plus elle est strictement décroissante sur cet intervalle en changeant de signe, donc il existe une valeur $\alpha > 0$ telle que $g(\alpha)=0$.

On a $g(0,5)\approx 0,009438$ et $g(0,6)\approx -0,141452$ donc $g(0,5)>0=g(\alpha)>g(0,6)$ et comme g est décroissante,
$0,5 < \alpha < 0,6$.

5. Pour $0 < x < \alpha$, alors $g(x)$ est positif ; pour $x > \alpha$ alors $g(x)$ est négatif.



1. a. $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(1+X)}{X}=1$ (cours).

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

2. $f(x)=x\ln(1+\frac{1}{x^2}),\ f'(x)=1.\ln(1+\frac{1}{x^2})+x.\dfrac{-\frac{2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}}=\ln(1+\frac{1}{x^2})+x.\dfrac{-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}}=\ln(1+\frac{1}{x^2})-\dfrac{2}{x^2+1}=g(x)$.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3. a. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x\ln(x^2+1)-x\ln x^2\right)$,

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x^2+1)=0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln(x^2+1)=\ln 1=0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x\ln x^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\frac{2\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} +\frac{2\ln x^{-1}}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X\to+\infty}\frac{2\ln X}{X} = 0^- \text{ avec } X = \frac{1}{x}.$$

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = 0$.

b. f dérivable en 0 si et seulement si la limite de son taux d'accroissement est finie.

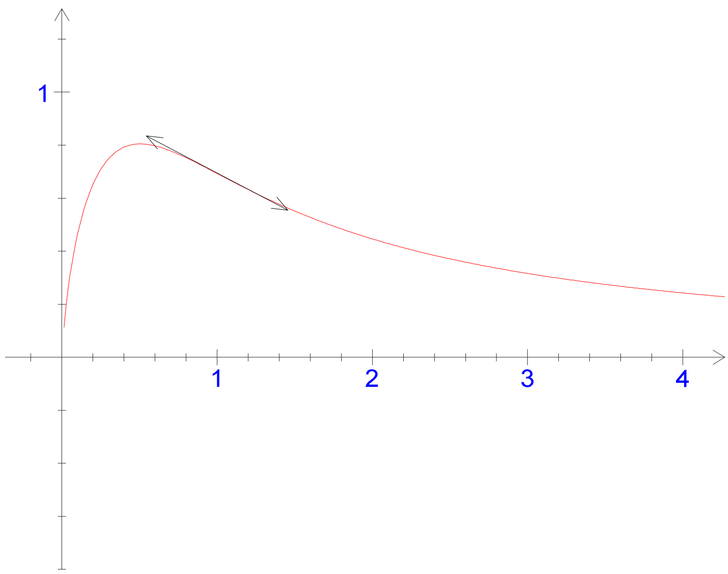
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

c. La tangente en O à f est verticale. Son équation est $x = 0$.

4. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1)+f(1)$: $f(1) = 1\ln(1+\frac{1}{1^2}) = \ln 2$, $f'(1) = g(1) = \ln 2 - 1$ d'où $y = (\ln 2-1)(x-1)+\ln 2 \Leftrightarrow y = (\ln 2-1)x+1$.

5.



Remarque :

On a vu dans la partie A que $g'(1) = 0$, or $g'(1) = f''(1)$, c'est-à-dire la dérivée seconde de f en 1 : la courbe admet un point d'inflexion pour $x = 1$.

1. 17. Logarithme+ asymptote+primitives

Soit la fonction définie sur l'intervalle I = $]4\ ; +\infty[$ par : $f(x) = -2x+5+3\ln\frac{x+1}{x-4}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormal $(O\ ; \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 1 cm.

1. Étude de f

a. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de I.

b. Montrer que sur I, $f'(x)$ est strictement négatif et dresser le tableau de variation de f.

c. Montrer que la droite (D) d'équation $y = -2x + 5$ est une asymptote à (C). Préciser la position de (C) par rapport à (D).

2. Tracer la courbe (C) et la droite (D) dans le repère $(O\ ; \vec{i}, \vec{j})$.

3. Déterminer les coordonnées du point de (C) où la tangente Δ a un coefficient directeur égal à $-\frac{9}{2}$.

Donner une équation de Δ et la tracer dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

4. Calcul d'aire

a. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, les primitives sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \ln x$.

b. Montrer que la fonction $G : x \to (x+1)\ln(x+1) - x$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \ln(x+1)$ sur I.

c. Montrer que la fonction $H : x \to (x-4)\ln(x-4) - x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln(x-4)$ sur I.

d. Déduire des questions précédentes le calcul de l'aire A du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations respectives $x = 5$ et $x = 6$.

On donnera la valeur exacte de A puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

5. Intersection de (C) et de l'axe des abscisses

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution, notée x_0.

b. Déterminer graphiquement un encadrement de x_0 d'amplitude 0,5.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de x_0 d'amplitude 10^{-2}. On explicitera la méthode employée.

Correction

1. a. Lorsque x tend vers 4, $\frac{x+1}{x-4}$ tend vers $+\infty$ ainsi que $\ln\frac{x+1}{x-4}$ donc f tend vers $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{x+1}{x-4}$ tend vers 1, $\ln\frac{x+1}{x-4}$ tend vers 0, $-2x+5$ tend vers $-\infty$ donc f tend vers $-\infty$.

b. $f'(x) = -2+3\left[\ln\frac{x+1}{x-4}\right]' = -2+3\left[\ln(x+1)-\ln(x-4)\right]' = -2+3\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-4}\right] = \frac{-2(x+1)(x-4)-15}{(x+1)(x-4)}$.

Lorsque $x > 4$, $x+1$ est positif, $x-4$ est positif donc le numérateur est négatif et le dénominateur est positif. Moralité, f' est négative.

c. $f(x)-(-2x+5) = \ln\frac{x+1}{x-4}$; nous avons dit que ce terme tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ donc la droite (D) est une asymptote à (C). Lorsque $x > 4$, $\frac{x+1}{x-4} > 0$ donc (C) est au-dessus de (D).

2. a. On pose $u = \ln x,\ v' = 1 \Rightarrow u' = \frac{1}{x},\ v = x$ d'où une primitive de $\ln x$ est $x\ln x - \int \frac{1}{x}x\,dx = x\ln x - x$.

b. On dérive G : $G'(x) = 1.\ln(x+1)+(x+1)\frac{1}{x+1}-1 = \ln(x+1)$.

c. Exactement pareil.

c. On cherche $A = \int_5^6 f(x)-(-2x+5)dx = \int_5^6 \ln(x+1)-\ln(4-x)dx = [G(6)-G(5)]-[H(6)-H(5)]$;

$G(6)-G(5) = 7\ln 7-6-6\ln 6+5 = 7\ln 7-6\ln 6-1$,

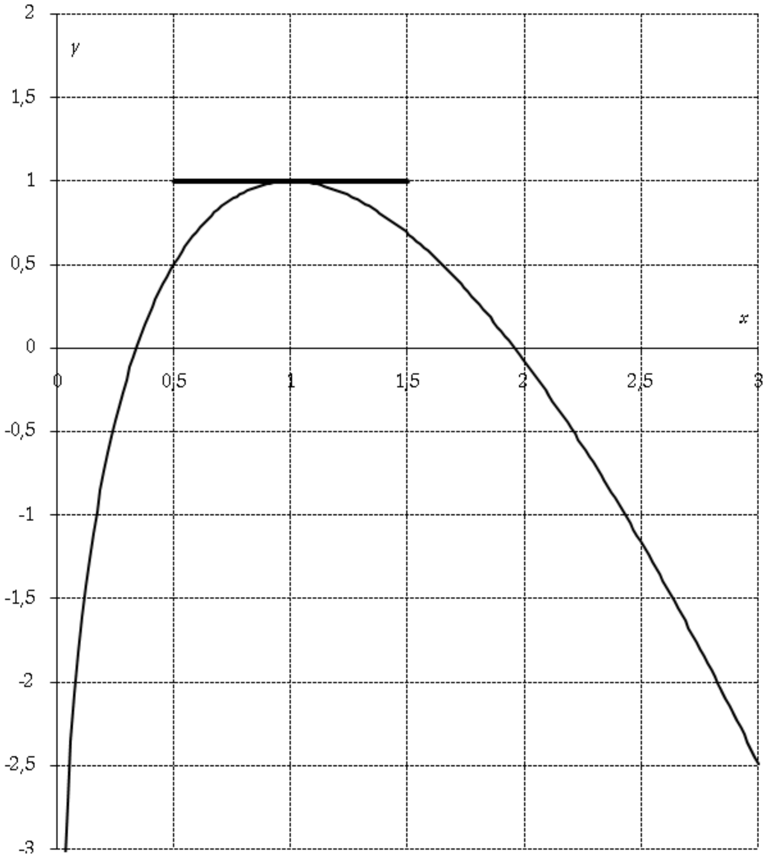
$H(6)-H(5) = 2\ln 2-6-1\ln 1+5 = 2\ln 2-1$,

et le résultat $A = 7\ln 7-6\ln 6-2\ln 2 \approx 1,48$ U.

1. 18. Fonction inconnue

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=ax+(bx+c)\ln x$ avec a, b et c des réels. La courbe (C) de f est donnée ci-dessous.



En utilisant ce graphique et en sachant que $f(2)=2-3\ln 2$, justifier que l'on a $a=c=1$ et $b=-2$.

Partie B

On considère alors la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=x+(1-2x)\ln x$.

1. a. Déterminer la limite de g en 0.

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.

2. a. Déterminer la fonction dérivée de g.

b. Etudier, pour x dans $]0\,;+\infty[$, le signe de $-2\ln x$ et celui de $\dfrac{1-x}{x}$. En déduire le signe de $g'(x)$ et les variations de g.

3. Dresser le tableau complet des variations de g.

4. Soit la droite Δ d'équation $y=x$.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1-2x)\ln x=0$ et donner une interprétation graphique des solutions.

b. Etudier la position de la courbe représentative de g par rapport à Δ.

<u>Correction</u>

Partie A

$f(2)=2-3\ln 2 \Rightarrow 2a+(2b+c)\ln 2=2-3\ln 2$; par ailleurs la dérivée s'annule en 1 et $f(1)=1$:

$f'(x)=a+b\ln x+\dfrac{bx+c}{x} \Rightarrow a+0+\dfrac{b+c}{1}=0 \Leftrightarrow a+b+c=0$; $f(1)=a+0=a=1$.

On a donc $2+(2b+c)\ln 2=2-3\ln 2 \Leftrightarrow 2b+c=-3$; avec $1+b+c=0$ on tire $c=1$ et $b=-2$.

Partie B

1. a. En 0, $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc g tend vers $-\infty$.

b. Mettons x en facteur : $g(x)=x\left[1+(\frac{1}{x}-2)\ln x\right]\to+\infty\left[1+(0-2)+\infty\right]=-\infty$.

2. a. $g'(x)=1-2\ln x+\dfrac{1-2x}{x}=\dfrac{x-2x\ln x+1-2x}{x}=\dfrac{1-x-2x\ln x}{x}$.

b. $-2\ln x$ change de signe en 1, de même que $\dfrac{1-x}{x}$ puisque x est positif. La dérivée est constituée de deux morceaux qui changent de signe au même endroit : avant 1 elle est positive, après 1 elle est négative.

3.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		+	0	−	
$g(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

4. a. $(1-2x)\ln x=0\Leftrightarrow\begin{cases}1-2x=0\\ \ln x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ ou $x=1$: la courbe coupe la droite Δ en ces deux points.

b. $g(x)-x=(1-2x)\ln x$ est positif sur $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$: C au-dessus de Δ ; sinon C est en dessous de Δ.

<u>1. 19. Une fonction assez simple</u>

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par :

$$f(x)=\frac{\ln x+xe}{x^2}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, unité graphique 2 cm.

<u>Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire</u>

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par : $g(x) = -2\ln x - xe + 1$.

1. Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2. Etudier le sens de variation de g.
3. Montrer que dans [0,5 ; 1] l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dont on déterminera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

<u>Partie B : Etude de la fonction f</u>

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier le sens de variation de f.
3. Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1+\alpha e}{2\alpha^2}$ et en donner une valeur approchée à 10^{-1} près.
4. Donner le tableau de variation de f.
5. Tracer (C).

<u>Correction</u>

A. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\ln x-xe+1\right)=-2\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-e\lim\limits_{x\to+\infty}x+1=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(-2\ln x - xe + 1\right) = -2\lim\limits_{x\to 0}\ln x - e\lim\limits_{x\to 0} x + 1 = +\infty$.

2. $g'(x) = -2\times\dfrac{1}{x} - e = \dfrac{-2-ex}{x}$ du signe de $-2-ex$; $-2-ex > 0 \Leftrightarrow x < -2/e$ ce qui est impossible puisque x est positif. La fonction g' est donc négative quel que soit x positif. Donc la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$.

3. $g(0{,}5) \approx 1{,}027$ et $g(1) \approx -1{,}718$ (à la calculatrice). La fonction g est continue, strictement décroissante, et change de signe sur l'intervalle $[0{,}5 ; 1]$ donc il existe une valeur unique α de cet intervalle telle que $g(\alpha) = 0$. A la calculatrice : $\alpha \approx 0{,}67$.

4. On en déduit que, quel que soit $x < \alpha$ on a $g(x)$ positif, et $x > \alpha$, $g(x)$ négatif.

B. 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x + xe}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\times\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e}{x} = 0$.

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\ln x + xe}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x\left(\frac{\ln x}{x}+e\right)}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\frac{\ln x}{x}+e}{x} = -\infty .$$

2. f est dérivable sur son domaine de définition.

$$f(x) = \frac{\ln x + xe}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} + \frac{e}{x},\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} - \frac{e}{x^2} = \frac{x - 2x\ln x - ex^2}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x - ex}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}.$$

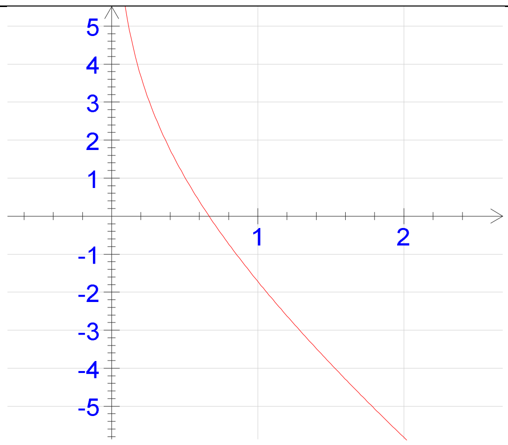
f' est donc du signe de g car x^3 est strictement positif sur $\mathbb{R}^*_+$.

Par conséquent, f' est positive quel que soit x inférieur à α et négative ailleurs et donc f croissante sur $]0 ; \alpha[$ et décroissante sur $]\alpha ; +\infty[$.

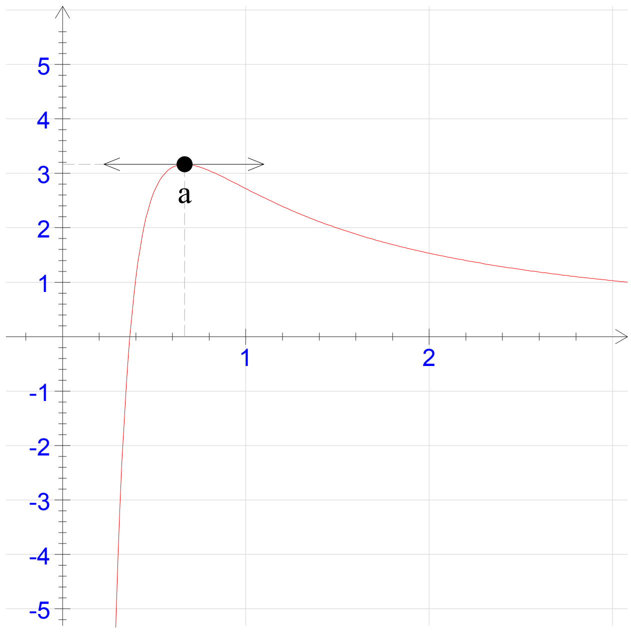
3. On sait que $g(\alpha) = 0$ c'est-à-dire que $1 - 2\ln\alpha - e\alpha = 0$ ou encore $\ln\alpha = \dfrac{1-e\alpha}{2}$, soit

$$f(\alpha) = \frac{\ln\alpha + e\alpha}{\alpha^2} = \frac{\frac{1-e\alpha}{2} + e\alpha}{\alpha^2} = \frac{1+\alpha e}{2\alpha^2} \approx 3{,}165 \approx 3{,}2 .$$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0



Courbe de g



Courbe de f

1. 20. Logarithmes

7 points

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = -2x^2 - 1 + \ln x$.

1. Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$. Étudier son signe sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Dresser le tableau de variations de g sur $]0\ ;\ +\infty[$. (On ne demande pas les limites de g aux bornes de son ensemble de définition).

3. En déduire que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = -x + 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln x}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. a. Calculer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

c. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -x+1$ est asymptote à la courbe C.

d. Étudier la position relative de C et Δ sur $]0\ ;\ +\infty[$.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

b. Vérifier que pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$.

c. Déduire de la partie A. le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

d. Calculer $f(1)$. En déduire le signe de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Dans le plan muni du repère $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$, tracer la droite Δ et la courbe C.

Partie C (version 1)

1. Vérifier que la fonction F définie sur $]0\ ;\ +\infty\ [$ par $F(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}(\ln x)^2$ est une primitive de f.

2. Calculer l'intégrale $I=\int_1^e f(x)\,dx$ (on donnera la valeur exacte).

3. a. Hachurer sur le graphique la partie E du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

b. Déduire de la question 2. de la partie C. la valeur exacte de l'aire S de E en cm², puis en donner la valeur arrondie en cm², au mm² près.

Partie C (version 2)

1. Démontrer qu'il existe une unique tangente à C parallèle à Δ, préciser les coordonnées du point de contact J et l'équation de cette tangente T. Tracer T dans le repère précédent.

2. Soit x un réel supérieur ou égal à 1. M et N sont les points d'abscisse x situés respectivement sur C et sur Δ.

a. Préciser, en fonction de x, la valeur de la distance MN.

b. Etudier sur $[1\ ;\ +\infty\ [$ les variations de la fonction h définie sur $[1\ ;\ +\infty\ [$ par $h(x)=\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$.

c. Déduire des questions précédentes que la distance MN est maximale lorsque M est en J et préciser la valeur de cette distance maximale.

<u>Correction</u>

Partie A

1. $g(x)=-2x^2-1+\ln x$, $g'(x)=-4x+\frac{1}{x}=\frac{1-4x^2}{x}=\frac{(1-2x)(1+2x)}{x}$. Sur $]0\ ;\ +\infty\ [$ seul le terme $1-2x$ change de signe : positif avant 1/2, négatif après 1/2.

2.

x	0	$1/2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$-$
$g(x)$	$\nearrow$	$-\frac{3}{2}-\ln 2$	$\searrow$

3. Le maximum de g est $-\frac{3}{2}-\ln 2$ donc $g(x)\le g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}-\ln 2<0$.

Partie B

1. a. $f(x)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}$: $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\ln x$; or en 0 $\ln x$ tend vers $-\infty$ et $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$. Conclusion, f tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0 ; la droite $x=0$ est asymptote de C.

b. On sait que $\frac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ donc f tend vers $-\infty$ car $-x+1$ tend vers $-\infty$.

c. $f(x)-(-x+1)=-x+1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}+x-1=-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ donc la droite Δ $y=-x+1$ est asymptote à la courbe C.

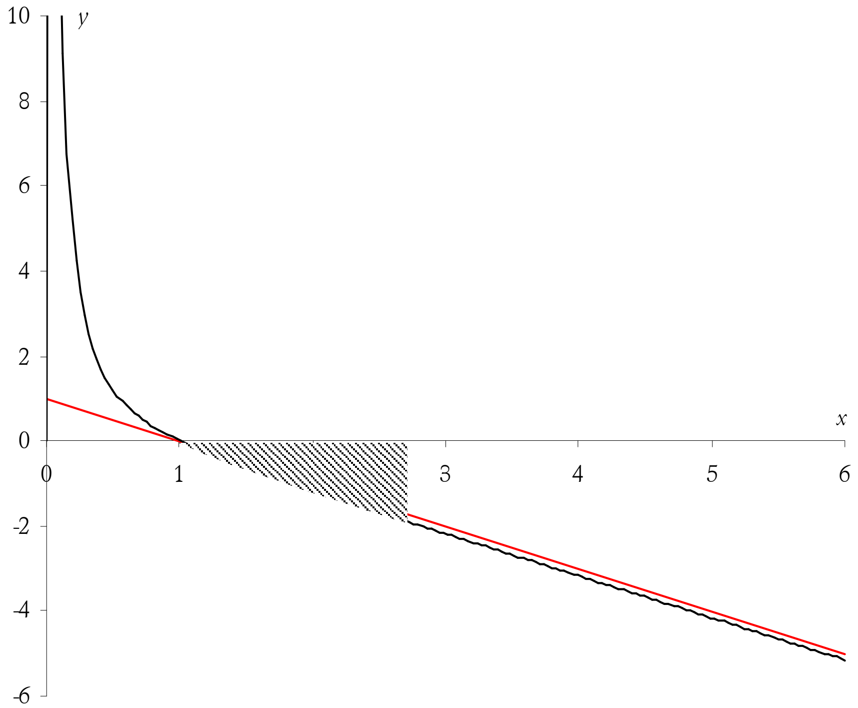
d. Lorsque $x>1$, $-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}<0$ car $\ln x>0$. Donc sur $[1\,;+\infty[$ C est au-dessus de Δ ; sur $]0\,;1]$ C est en dessous de Δ.

2. a. b. c. $f'(x) = -1 - \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{-2x^2 - 1 + \ln x}{2x^2} = \frac{g(x)}{2x^2}$. Donc *f'* est négative et *f* décroissante.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

d. $f(1) = 0$: lorsque x est inférieur à 1, $f(x) > f(1) = 0$ car *f* est décroissante. Lorsque x est supérieur à 1, $f(x) < f(1) = 0$.

3.



Partie C (version 1)

1. $F'(x) = -\frac{1}{2}(2x) + 1 - \frac{1}{4}\left(2\frac{1}{x}\ln x\right) = -x + 1 - \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x} = f(x)$: *F* est une primitive de *f*.

2. $I = \int_1^e f(x)dx = F(e) - F(1) = \left[-\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{1}{4}(\ln e)^2\right] - \left[-\frac{1}{2}1^2 + 1 - \frac{1}{4}(\ln 1)^2\right] = -\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{3}{4} \approx -1{,}726$.

3. b. L'unité d'aire est $1\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 2\text{ cm}^2$; on prend la valeur absolue de l'intégrale multipliée par l'unité d'aire, ce qui nous fait $e^2 - 2e + \frac{3}{2}$, soit environ 3,45 cm^2 au mm^2 près.

Partie C (version 2)

1. Pour avoir une tangente parallèle à Δ, il faut trouver x tel que $f'(x)=-1$, soit $\frac{-2x^2-1+\ln x}{2x^2}=-1 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x=e$. L'ordonnée est alors $f(e)=-e+1-\frac{1}{2e}$; l'équation de T est $y=-x+e-e+1-\frac{1}{2e}=-x+1-\frac{1}{2e}$.

2. a. Comme C est en dessous de Δ, on a $MN=(-x+1)-f(x)=\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}=h(x)$.

b. $h'(x)=\frac{1}{2}\frac{1-\ln x}{x^2}$ qui change de signe en $x=e$; la distance MN est maximale lorsque M est en J et cette distance vaut $h(e)=\frac{\ln e}{2e}=\frac{1}{2e}$.

1. 21. Ln+second degré+intégrale, Antilles 2001

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On considère la fonction *f*, définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=-3-\ln x+2(\ln x)^2.$$

On note (C) sa courbe représentative.

Partie A - Étude de la fonction *f* et tracé de la courbe (C)

1. a. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'équation $f(x)=0$. (On pourra poser ln$x$ = X).

b. Résoudre dans $]0\,;\,+\infty[$ l'inéquation $f(x)>0$.

2. a. Déterminer les limites de *f* en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer $f'(x)$.

c. Étudier le sens de variation de *f* et dresser son tableau de variations.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $e^{\frac{5}{4}}$.

4. Tracer la courbe (C) et la droite (T). (Unité graphique : 2 cm sur chaque axe.)

Partie B - Calcul d'une aire

1. Restitution organisée des connaissances :

Démontrer que la fonction *h*, définie par $h: x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0\,;\,+\infty[$ (attention on ne demande pas simplement de le vérifier…)

2. On pose $I_1=\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}}\ln x\,dx$ et $I_2=\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}}(\ln x)^2\,dx$.

a. Calculer I_1.

b. Montrer que $I_2=\frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{e}$.

c. Calculer $I=\int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}}f(x)\,dx$. En déduire l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ du plan tels que $\frac{1}{e}\le x\le e^{\frac{3}{2}}$ et $f(x)\le y\le 0$.

Correction

Partie A $f(x)=-3-\ln x+2(\ln x)^2$.

1. a. $f(x) = -3 - \ln x + 2(\ln x)^2 = 0$: on pose $X = \ln x$ d'où $-3 - X + 2X^2 = 0 \Rightarrow X_1 = -1, X_2 = \frac{3}{2}$ d'où $x = e^{-1}$ ou $x = e^{\frac{3}{2}}$.

b. $-3 - X + 2X^2 > 0 \Leftrightarrow X = \ln x \in \left]-\infty ; -1\right[\cup \left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[\Leftrightarrow x \in \left]0 ; e^{-1}\right[\cup \left]e^{\frac{3}{2}} ; +\infty\right[$.

2. a. Toujours avec $X = \ln x$, lorsque x tend vers 0, X tend vers $-\infty$ donc $-3 - X + 2X^2$ se comporte comme $2X^2$ qui tend vers $+\infty$; lorsque x tend vers $+\infty$, X tend vers $+\infty$ donc $-3 - X + 2X^2$ se comporte comme $2X^2$ qui tend vers $+\infty$.

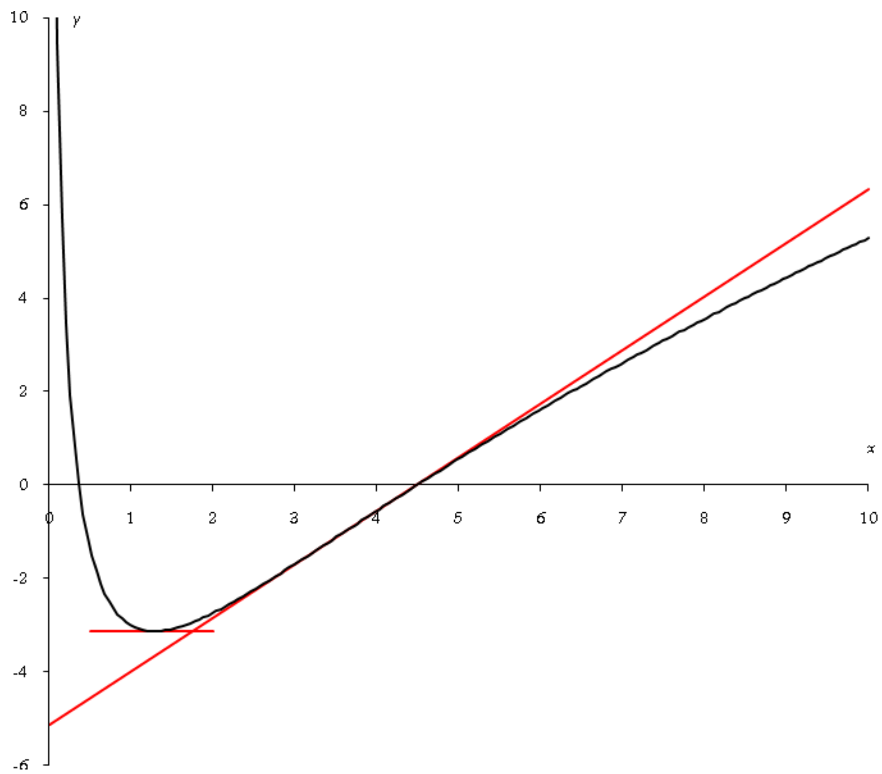
b. $f'(x) = -\frac{1}{x} + 2 \times 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = \frac{-1 + 4\ln x}{x}$.

c. f est croissante lorsque $4\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow x > e^{\frac{1}{4}}$. $f\left(e^{1/4}\right) = -3 - \frac{1}{4} + 2\frac{1}{16} = -\frac{25}{8}$.

x	0		$e^{\frac{1}{4}}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-25}{8}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $f\left(e^{\frac{5}{4}}\right) = -3 - \frac{5}{4} + 2\frac{25}{16} = \frac{-24 - 10 + 25}{8} = -\frac{9}{8}$; $f'\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{-1 + 4\frac{5}{4}}{e^{5/4}} = 4e^{-5/4}$; $y = 4e^{-5/4}\left(x - e^{5/4}\right) - \frac{9}{8}$.

4.



Partie B

1. Restitution organisée des connaissances : on fait une intégration par parties en posant $u'=1$ et $v=\ln x$ d'où on tire $\int \ln x dx = x\ln x - \int x \times \frac{1}{x} dx = x\ln x - \int 1 dx = x\ln x - x$.

2. On pose $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln x dx$ et $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 dx$.

a. $I_1 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} \ln x dx = [x\ln x - x]_{1/e}^{e^{3/2}} = e^{\frac{3}{2}}\frac{3}{2} - e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{e}(-1) + \frac{1}{e} = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{e}$.

b. $I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 dx$: intégration par parties en posant $u'=1$ et $v=(\ln x)^2$, soit $u=x$, $v'=2\frac{1}{x}\ln x$, soit

$I_2 = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2\right]_{1/e}^{e^{3/2}} - \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} 2\ln x dx = e^{\frac{3}{2}}\frac{9}{4} - \frac{1}{e} - 2I_1 = \frac{9}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{e} - e^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{e} = \frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}$.

c. $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e^{\frac{3}{2}}} -3 - \ln x + 2(\ln x)^2 dx = -3\left(e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{e}\right) - I_1 + 2I_2 = -3e^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{e} - \left(\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{e}\right) + 2\left(\frac{5}{4}e^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{e}\right) = -e^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{e}$.

Comme on a pu le remarquer les bornes $\frac{1}{e} \le x \le e^{\frac{3}{2}}$ correspondent précisément aux valeurs de x pour lesquelles f s'annule. La valeur de I est négative car f est négative sur cet intervalle ; on a donc l'aire, en unités d'aire, égale à $-I = e^{\frac{3}{2}} + \frac{9}{e} \approx 7,8$.

1. 22. Ln et calculatrice, N. Caledonie 2005

6 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par : $f(x) = x^2 - 2,2x + 2,2\ln(x+1)$.

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $-2 \le x \le 4$, $-5 \le y \le 5$.

Reproduire sur la copie l'allure de la courbe obtenue grâce à la calculatrice.

2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :

a. Sur les variations de la fonction f ?

b. Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f.

a. Étudier le sens de variation de la fonction f.

b. Étudier les limites de la fonction f en -1 et en $+\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.

c. Déduire de cette étude, en précisant le raisonnement, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

d. Les résultats aux questions 3. a. et 3. c. confirment-ils les conjectures émises à la question 2. ?

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0,1 ; 0,2]$, de façon à visualiser les résultats de la question 3.

a. Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y proposez-vous pourmettre en évidence les résultats de la question 3. c. dans la fenêtre de votre calculatrice ?

b. À l'aide de la calculatrice determiner une valeur approchée par défaut à 10^{-2} près de la plus grande solution α de l'équation $f(x) = 0$.

5. Soit F la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par $F(x)=\frac{1}{3}x^3-1,1x^2-2,2x+2,2(x+1)\ln(x+1)$.

a. Démontrer que F est une primitive de f sur $]-1\ ;\ +\infty[$.

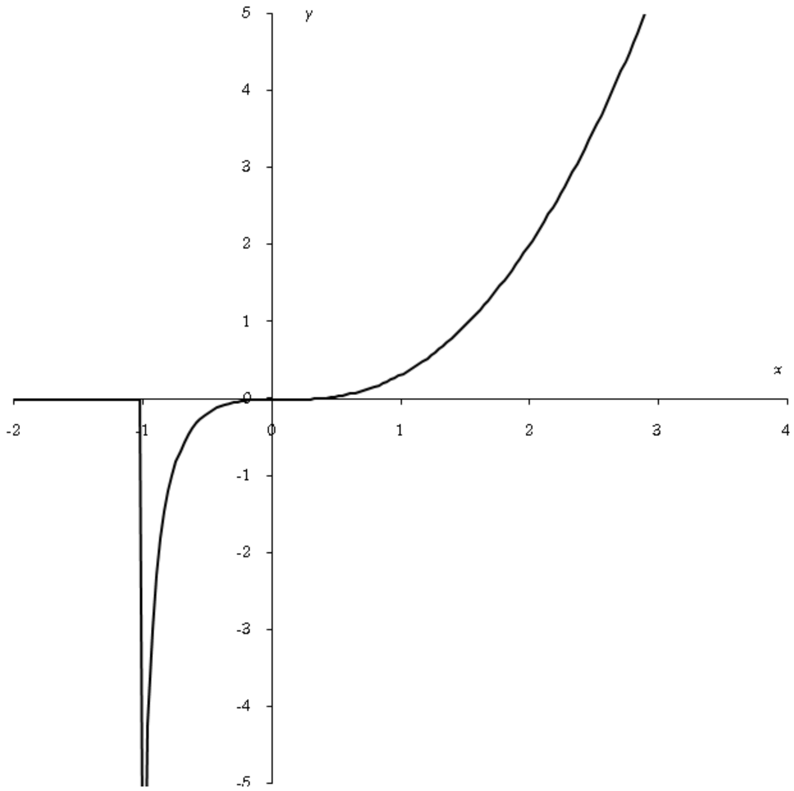
b. Interpréter graphiquement l'intégrale $\int_0^\alpha f(x)dx$

c. Calculer $\int_0^\alpha f(x)dx$ et exprimer le résultat sous la forme $b\alpha^3+c\alpha^2$ (b et c réels).

Correction

f sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x)=x^2-2,2x+2,2\ln(x+1)$.

1.



2. a. f semble croissante.

b. Il semble n'y avoir qu'une solution à l'équation $f(x) = 0$, mais c'est douteux.

3. a. $f'(x)=2x-2,2+\frac{2,2}{x+1}=\frac{2x^2+2x-2,2x-2,2+2,2}{x+1}=\frac{2x^2-0,2x}{x+1}=\frac{x(2x-0,2)}{x+1}$; on a deux racines, 0 et 0,1 ; le signe du trinôme donne f croissante avant 0, décroissante entre 0 et 0,1 puis de nouveau croissante.

b. En -1, $\ln(x+1)$ tend vers $-\infty$ de même que f ; en $+\infty$ les croissances comparées donnent le terme x^2 gagnant et f tend vers $+\infty$.

c. f s'annule donc deux fois : en 0 évidemment puis une deuxième fois après 0,1 puisque f est croissante entre 0,1 et $+\infty$ et passe d'un nombre négatif à des valeurs positives.

x	-1		0		0,1		$+\infty$
f'		+	0	−	0		
f	$-\infty$	↗	0	↘	$-0,0003$	↗	$+\infty$

d. Evidemment non…

4. a. Le minimum est aux environs de −0,0003, et on peut prendre $f(0,2)\approx 0,0011$ en positif.

b. On a $\alpha \approx 0,1517$, soit 0,15 à 10^{-2} près.

5. $F(x)=\frac{1}{3}x^3-1,1x^2-2,2x+2,2(x+1)\ln(x+1)$.

a. On dérive F :

$F'(x)=\frac{1}{3}.3x^2-1,1.2x-2,2+2,2\left[1.\ln(x+1)+(x+1)\frac{1}{x+1}\right]=x^2-2,2x-2,2+2,2\ln(x+1)+2,2=f(x)$.

b. $\int_0^{\alpha} f(x)dx$ représente l'aire algébrique (ici négative) comprise entre la courbe de f, les droites $x = 0$ et $x=\alpha$.

c. $\int_0^{\alpha} f(x)dx=F(\alpha)-F(0)=\frac{1}{3}\alpha^3-1,1\alpha^2-2,2\alpha+2,2(\alpha+1)\ln(\alpha+1)$; comme $f(\alpha)=0$, on a

$$\alpha^2-2,2\alpha+2,2\ln(\alpha+1)=0 \Leftrightarrow 2,2\ln(\alpha+1)=2,2\alpha-\alpha^2 ,$$

soit

$$\int_0^{\alpha} f(x)dx=\frac{1}{3}\alpha^3-1,1\alpha^2-2,2\alpha+(\alpha+1)\left(2,2\alpha-\alpha^2\right)=-\frac{2}{3}\alpha^3+0,1\alpha^2 .$$