EXERCICES : FONCTION LOGARITHME

Définition et propriétés algébriques

Exercice 1 :
Résoudre :
a. $e^x=1$; **b.** $e^x=4$; **c.** $e^{2x}=2$;
d. $4e^{-x}-3=12$; **e.** $e^{2x-1}=2$; **f.** $e^{-x}=-5$.

Exercice 2 :
Résoudre :
a. $\ln x=3$; **b.** $\ln(2x)=0$;
c. $2\ln x-1=6$; **d.** $\ln(2x-1)=3$;
e. $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)=1$; **f.** $\ln(x^2)=4$.

Exercice 3 :
Écrire plus simplement les nombres suivants :
$a=e^{\ln 3}+e^{-\ln 5}$; $b=\frac{e^{3+\ln 8}}{e^{2+\ln 4}}$; $c=\frac{e^{\ln 8}}{e^{3\ln 2}}$

Exercice 4 :
Montrer que pour tout réel x > 1,
$$e^{\ln(x-1)+\ln x}=x^2-x \text{ .}$$

Exercice 5 :
Simplifier l'écriture des nombres suivants :
$a=\ln 3+\ln\frac{1}{3}$; $b=\ln\frac{1}{16}$; c = $\frac{1}{2}\ln\sqrt{2}$.

Exercice 6 :
Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.
$a=\ln 50$; $b=\ln\frac{16}{25}$; $c=\ln 250$.

Exercice 7 :
Dans chacun des cas suivants, préciser l'ensemble des réels x pour lesquels l'égalité est vraie.
a. $\ln(x^2-x)=\ln x+\ln(x-1)$;
b. $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+2)$.

Équations - Inéquations

Exercice 8 :
Dans chacun des cas suivants, résoudre l'inéquation d'inconnue n proposée (n entier naturel).
a. $2^n\leqslant 100$. **b.** $\left(\frac{1}{3}\right)^n\leqslant 10^{-2}$.
c. $0{,}2\geqslant\left(\frac{2}{5}\right)^n$. **d.** $\left(1+\frac{3}{100}\right)^n\geqslant 2$.

Exercice 9 :
Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'équation, la résoudre :
a. $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$.
b. $2\ln x=\ln(2x^2+8x)$.

Exercice 10 :
Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'équation, la résoudre :
a. $\ln(x+1)=\ln 3$; **b.** $\ln(x+3)=\ln(2-x)$;
c. $\ln(x^2-4)=\ln(1-4x)$; **d.** $\ln(x^2-2x+2)=0$.

Exercice 11 :
Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'équation, la résoudre :
a. $\ln(1-x)+\ln(1+x)=2(\ln 2-\ln 5)$;
b. $\ln x+\ln(x-3)=\ln 4$;
c. $\ln(x(x-3))=\ln 4$.

Exercice 12 :
Après avoir déterminé l'ensemble de définition des solutions de l'inéquation, la résoudre :
a. $\ln x\leqslant\ln 3$; **b.** $\ln 2x\leqslant\frac{1}{2}\ln 4$;
c. $\ln x\geqslant 2\ln 5$; **d.** $\ln x\leqslant 2\ln 4-3\ln 2$.
e. $\ln\left(\frac{x-1}{2x-3}\right)\geqslant 0$.

Exercice 13 :
Résoudre les équations dans $\mathbb{R}$.
a. $\ln(x+1)+\ln(x-2)<2\ln(3-x)$;
b. $\ln(x^2-x-2)<2\ln(3-x)$.

Exercice 14 :
1. Résoudre l'équation : $2X^2-X-1=0$.
2. En déduire les solutions de l'équation :
$$2(\ln x)^2-\ln x-1=0 \text{ .}$$

Exercice 15 :
En vous inspirant de l'exercice précédent, résoudre les équations suivantes :
a. $-(\ln x)^2-4\ln x+5=0$;
b. $2(\ln x)^2-3\ln\left(\frac{1}{x}\right)-9=0$.

Exercice 16 :
1. Résoudre l'inéquation : $X^2+2X-3\geqslant 0$.
2. En déduire les solutions de l'inéquation :
$$(\ln x)^2+2\ln x-3\geqslant 0 \text{ .}$$

Dérivées - Primitives

Exercice 17 :
Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions puis calculer sa dérivée.
1. $f(x)=x\ln x$. **2.** $f(x)=(\ln x)^2$.
3. $f(x)=\frac{1}{\ln x}$. **4.** $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$.

Exercice 18 :
Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions puis calculer sa dérivée.
1. $f(x)=x^2\ln(1+x)$. **2.** $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$.
3. $f(x)=\ln(3-x^2)-x+2$. **4.** $f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

Exercice 19 :
Déterminer l'ensemble de dérivabilité de chacune des fonctions puis calculer sa dérivée.

1. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{x}$. **2.** $f(x)=\ln(\ln x)$.

3. $f(x)=(1-e^{-x})\ln x$. **4.** $f(x)=e^{x\ln(1-x^2)}$.

Exercice 20 :
Déterminer les primitives sur I de chacune des fonctions.

a. $f(x)=-\dfrac{3}{x}$ $I=]0;+\infty[$;

b. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $I=]-\infty;0[$;

c. $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ $I=]1;+\infty[$.

Exercice 21 :
Pour chacune des fonctions f suivantes :
a. Justifier que f admet des primitives sur I ;
b. Déterminer toutes les primitives de f sur I ;
c. Déterminer la primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0 .

1. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; $I=]-1;1[$; $x_0=0$ et $y_0=0$.

2. $f(x)=\dfrac{x+e^{2x}}{x^2+e^{2x}}$; $I=\mathbb{R}$; $x_0=0$ et $y_0=0$.

3. $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln x$; $I=]0;+\infty[$; $x_0=1$ et $y_0=0$.

4. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$; $I=]0;1[$; $x_0=\dfrac{1}{e}$ et $y_0=1$.

Exercice 22 :
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ - { 1 } par :

$$f(x)=\frac{-3x^2+4x-3}{x-1}.$$

1. Déterminer les réels a, b et c tels que, pour tout x distinct de 1, on ait $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.
2. En déduire les primitives de f sur $]1;+\infty[$.

Limites

Exercice 24: Vrai - Faux
Justifier la réponse.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x^2}{x}=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\ln x}=+\infty$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^5\ln x=0$.

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x}{\ln x}=+\infty$.

Exercice 25:
Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par :

a. $f(x)=x-\ln x$; **b.** $f(x)=x-\ln(x^2)$;

c. $f(x)=\dfrac{\ln(2x)}{x^2+1}$; **d.** $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-1)}{x^2+1}$.

Exercice 26 :
Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par :

a. $f(x)=x\ln(3x)$; **b.** $f(x)=(x^2+1)\ln(x+1)$;

c. $f(x)=\ln(e^{3x}-1)$; **d.** $f(x)=\dfrac{x-1}{x}\ln x$.

Études de fonctions

Exercice 27 :
Soit a et b, deux réels, et g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=ax+b+\dfrac{\ln x}{x}$.
Déterminer a et b pour que la courbe représentative de g passe par le point $A(1;0)$ et admette, en ce point, une tangente parallèle à la droite d'équation $y=2x$.

Exercice 28 :
Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x)=2x-1+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan (unité graphique : 2 cm).
1. Étudier la limite de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a. Étudier la limite de f en $+\infty$.
b. Démontrer que la droite Δ d'équation $y=2x-1$ est une asymptote à C_f en $+\infty$.
Étudier la position de C_f par rapport à Δ.
3. Étudier les variations de f. Dresser son tableau de variations.
4. Démontrer que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$ et déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
5. Tracer la droite Δ et la courbe C_f .

Exercice 29 :
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x+2-\ln(1+e^{2x}).$$

C est sa courbe dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.
1. a. Déterminer la limite de $\ln(1+e^{2x})$ en $-\infty$.
b. En déduire l'existence d'une asymptote oblique Δ dont on précisera une équation.
c. Montrer que pour tout réel x :

$$f(x)=2-x-\ln(1+e^{-2x}).$$

d. Déterminer la limite de f en $+\infty$, ainsi que l'existence d'une seconde asymptote oblique Δ'.
2. Montrer que l'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour C.
3. Résoudre l'inéquation $1-e^{2x}\geqslant 0$.
4. Étudier les variations de la fonction f.
5. Représenter Δ, Δ' et C, après avoir indiqué la position de Δ et C.

Exercice 30 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x}$.

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=1+x-x\ln x .$$

a. Étudier la limite de g en chacune des bornes de son ensemble de définition.

b. Étudier les variations de g sur $]0;+\infty[$ et construire son tableau de variations.

c. Démontrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

2. Étude et représentation graphique de la fonction f.

a. Étudier la limite de f en chacune des bornes de son ensemble de définition et interpréter graphiquement les résultats.

b. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer la dérivée f' de f sur $]0;+\infty[$.

c. Vérifier que f' a le même signe que g sur $]0;+\infty[$.

d. Construire le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

e. Démontrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha}$.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 10^{-2} .

f. Déterminer l'équation réduite de la tangente T de C_f au point d'intersection de C_f et de l'axe des abscisses.

g. Tracer les éventuelles asymptotes à C_f , T puis C_f .

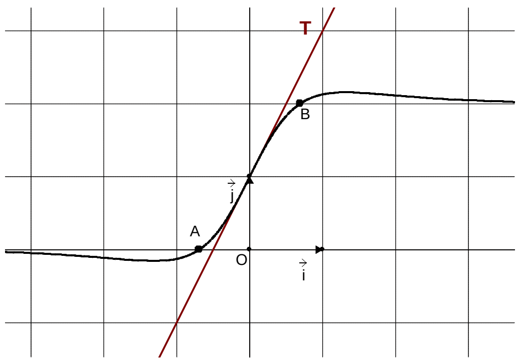
Exercice 31 :

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2e^{2x}-e^{x}}{e^{2x}-e^{x}+1} .$$

On donne ci-dessous la courbe C_f représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Le point I de coordonnées (0 ; 1) est un centre de symétrie de C_f et la droite T est tangente à C_f en ce point.



1. a. Étudier la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Interpréter graphiquement les résultats.

b. Calculer l'abscisse du point d'intersection, noté A, de C_f et de l'axe des abscisses.

En déduire l'abscisse du point B de C_f d'ordonnée 2.

2. On répondra aux questions suivantes grâce à une lecture graphique et sans aucun calcul.

a. Donner le signe de f sur $\mathbb{R}$.

b. Donner la valeur de $f'(0)$.

3. Déterminer la primitive G sur $\mathbb{R}$ de f qui prend la valeur –1 en 0.

B. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x)=\ln(e^{2x}-e^{x}+1)-1$$

et Γ sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Étudier la limite de F en $-\infty$.

Interpréter graphiquement le résultat.

b. Démontrer que :

Pour tout réel x, $F(x)=2x-1+\ln(1-e^{-x}+e^{-2x})$.

c. Étudier la limite de F en $+\infty$.

d. Démontrer que la courbe Γ admet une asymptote oblique d'équation $y=2x-1$ en $+\infty$.

2. Déduire de la partie **A** le sens de variation de F et dresser son tableau de variation.

3. Tracer la courbe Γ et ses asymptotes ainsi que la droite tangente à Γ au point d'abscisse 0.

Un problème d'équation différentielle

Exercice 32 :

Partie A - Soit (E) l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'+xy=0 .$$

1. a. Démontrer que si une fonction f est solution de (E) sur $I=]1;+\infty[$ qui ne s'annule pas sur *I*, alors f vérifie la condition (1) : $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x^2-1}$.

b. Déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur *I* qui satisfont à la condition (1).

2. Soit g une solution de l'équation (E) sur *I* et h la fonction définie sur cet intervalle par : $h(x)=\dfrac{g(x)}{\sqrt{x^2-1}}$.

a. Démontrer que h est une fonction constante sur *I*.

b. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur *I*.

Partie B - Soit (E') l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'+xy=\frac{1}{x}+x\ln x-x .$$

1. Vérifier que la fonction u : $x\longmapsto \ln x$ est une solution de l'équation (E') sur $I=]1;+\infty[$.

2. Démontrer que f est une solution de (E) sur *I* si et seulement si la fonction $f+u$ est une solution de (E') sur *I*.

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E') sur *I.*

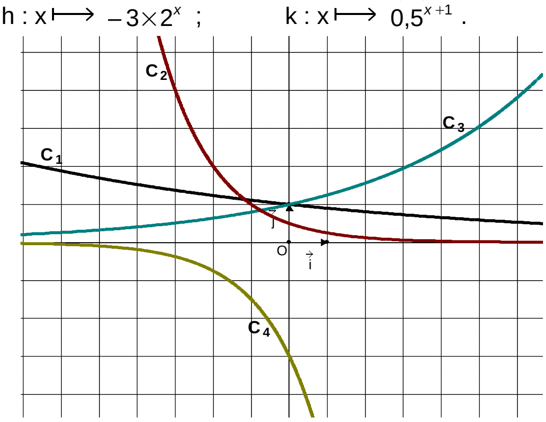
Autres fonctions

Exercice 33 :

On donne ci-dessous les courbes représentatives des fonctions suivantes :

f : $x\longmapsto 0{,}9^{x}$; g : $x\longmapsto \left(\dfrac{5}{4}\right)^{x}$;

h : $x\longmapsto -3\times 2^{x}$; k : $x\longmapsto 0{,}5^{x+1}$.



Associer à chaque fonction sa courbe représentative.

Exercice 34 :
Résoudre dans ℝ chacune des équations :
a. $10^x = 5$; **b.** $0{,}25^{2x} = e$ **c.** $(-4)^{2x} = 16$.

Exercice 35 :
Résoudre dans ℝ chacune des équations :
a. $5^{x+3} = 25$; **b.** $2^{3-x} = 5 \times 2^{5-2x}$;
c. $3^{2x+1} = 2^{x+2}$.

Exercice 36 :
Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :
a. $2^{x+1} > 3$. **b.** $2^{x+3} \leqslant 4^{2-x}$.

Exercice 37 :
1. Résoudre l'équation $u^2 - 3u + 2 = 0$.
2. En déduire les solutions éventuelles de l'équation :

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 .$$

Exercice 38 :
On se propose de comparer les croissances des fonctions , f : x $\longmapsto x^2$ et g : x $\longmapsto 2^x$, sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
1. Expliquer pourquoi l'étude de la fonction h : x $\longmapsto x \ln 2 - 2 \ln x$ permettra de répondre au problème.
2. Faire l'étude complète de la fonction h sur $]0;+\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet deux solutions dans l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. En déduire le signe de *h(x)* sur $]0;+\infty[$.
5. Conclure sur le problème posé.

Exercice 39 :
On se propose de déterminer le nombre de solutions dans ℝ de l'équation $2^x = 2(x+1)$, pour tout réel x.
1. Déterminer les limites de f en + ∞ et – ∞.
2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-2} près du réel x_0 tel que $f'(x_0) = 0$).
3. Dresser le tableau de variation de f (on ne calculera pas $f(x_0)$ mais on montrera que $f(x_0) < 0$).
4. En déduire que l'équation $2^x = 2(x+1)$ admet deux solutions α et β, avec $\alpha < x_0 < \beta$.
Montrer que β est un entier naturel et donner un encadrement de longueur 10^{-2} du réel α.
5. Application
a. Justifier que, pour tout x ⩾ 3, $2^x \geqslant 2(x+1)$.
b. On admet que lorsqu'on lance n fois, n ⩾ 2, une pièce de monnaie bien équilibrée, la probabilité d'obtenir au plus une fois Pile est $p_n = \dfrac{n+1}{2^n}$.
Combien de fois doit-on lancer la pièce pour que p_n soit égale à $\dfrac{1}{2}$? supérieure à $\dfrac{1}{2}$? inférieure à $\dfrac{1}{2}$?

Exercice 40 :
Simplifier les écritures suivantes :
$\sqrt[10]{512}$; $\sqrt[3]{64}$; $\sqrt[5]{243}$; $27^{\frac{5}{3}}$; $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$.

Exercice 41 :
Résoudre dans ℝ les équations suivantes :
a. $x^{\frac{3}{2}} = x$. **b.** $x^{\frac{2}{3}} = 25$.
c. $3x^{\frac{1}{4}} = 2x^{\frac{1}{2}}$. **d.** $3x\sqrt{x} = 81$.

Exercice 42 :
Soit f la fonction définie sur ℝ+ par $f(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt[3]{x}}$.
1. Étudier et interpréter la dérivabilité de *f* en 0.
2. Étudier les variations de *f*.

Exercice 43 :
Exprimer en fonction de log 2 les nombres suivants :
log 20 ; log 2000 ; log 0,008.

Exercice 44 : Utile aussi pour le bac... en Chimie !
On sait, en Chimie, que le pH d'une solution permet d'exprimer son caractère acide ou basique. Ce nombre est un décimal compris entre 1 et 14 de sorte que :
- Si pH < 7, alors la solution est dite acide.
- Si pH > 7, alors la solution est dite basique.
- Si pH = 7, elle est dite neutre.

On sait alors que le pH est associé à la relation pH = – log $[H_3O^+]$ où $[H_3O^+]$ est la concentration en ions H_3O^+ , exprimée en mol/L.
1. Une solution possède une concentration en ions H_3O^+ égale à 5×10^{-9} . Quel est son pH ? Que peut-on dire d'une solution dont la concentration en ions H_3O^+ est égale à 0,1 ?
2. Quelle est la concentration en ions H_3O^+ d'une solution neutre ?
3. Si l'on augmente la concentration en ions H_3O^+ dans une solution, diminue-t-on ou augmente-t-on le pH de cette solution ?
4. Que faut-il faire à une solution pour incrémenter ou décrémenter son pH ?

Vocabulaire : Incrémenter, c'est ajouter 1. Donc décrémenter, c'est... ?