

Exercices:etude de fonctions exponentielles**Exercice 1 :**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = e^x$.

On note \mathcal{C} sa courbe représentative.

On veut étudier la position de f par rapport à ses tangentes.

- 1) Soit a un nombre réel et A le point de \mathcal{C} d'abscisse a .
Montrer que l'équation de la tangente à \mathcal{C} en A est $y = e^a(x - a + 1)$.
- 2) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :
$$g(x) = e^x - e^a x + e^a(x - 1).$$
 - a) Déterminer la dérivée de la fonction g .
 - b) Etudier les variations de la fonction g et donner son tableau de variations.
On ne calculera pas les limites.
 - c) Donner le signe de la fonction g sur \mathbb{R} .
- 3) Dédurre de ce qui précède la position de \mathcal{C} par rapport à la tangente de A .

Exercice 2 : Etude d'une fonction

- 1) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$f(x) = (2 - x)e^x - 1.$$
 - a) Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.
 - b) Calculer la dérivée de f et déterminer son signe.
En déduire les variations, puis le tableau de variations de f .
 - c) Prouver que la fonction f s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera α et β avec $\alpha < \beta$.
 - d) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α et β .
 - e) Montrer que $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$
- 2) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = e^x - x$.
 - a) Calculer la dérivée sur \mathbb{R} de h .
 - b) Démontrer que, pour tout x , $h(x) > 0$.
- 3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.
 - a) Démontrer que la fonction g est définie sur \mathbb{R} .
 - b) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$ et préciser les éventuelles asymptotes.
 - c) Calculer la dérivée de g .

Exercice 1 :

1) Une équation de la tangente à \mathcal{C} en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Soit : $y = e^a(x - a) + e^a$

Soit : $y = e^a(x - a + 1)$

2) a) g est dérivable sur \mathbb{R} et $g'(x) = e^x - e^a$

b) $g'(x) > 0 \Rightarrow e^x - e^a > 0 \Rightarrow x > a$

$g(a) = e^a - ae^a + ae^a - e^a = 0$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
f'		-	+
f(x)			0

c) D'après le tableau de variation de g , on a $g(x) \geq 0$ pour tout x réel.

3) On a $f(x) - e^a(x - a + 1) = e^x - xe^a + e^a(a - 1) = g(x)$

Comme $g(x) \geq 0$, on en déduit que $f(x) \geq e^a(x - a + 1)$

Donc \mathcal{C} est toujours au dessus de la tangente de A.

Exercice 2 : Etude d'une fonction

1) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) $f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = e^x(1 - x)$

$f'(x) > 0 \Rightarrow x < 1$

f est croissante sur $]-\infty; 1]$ et décroissante sur $[1; +\infty[$.

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'		+	-
f(x)	-1	$e - 1$	$-\infty$

$f(1) = e - 1 > 0$

c) La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ et prend ses valeurs dans $]-1; e - 1]$. Donc d'après le théorème de la bijection il existe un unique réel α appartenant à $]-\infty; 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

La fonction f est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ et prend ses valeurs dans $[e - 1; -\infty[$. Donc d'après le théorème de la bijection il existe un unique réel β appartenant à $[1; +\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$.

d) On trouve $-1,15 < \alpha < -1,14$ et $1,84 < \beta < 1,85$.

e) Comme $f(\alpha) = 0$ alors $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$

2) a) $h'(x) = e^x - 1$

b) $h'(x) > 0 \rightarrow e^x > 1 \rightarrow x > 0$

Tableau de variations de h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'	-		+
h(x)	$+\infty$	1	$+\infty$

Du tableau des variations de h, on déduit directement que $h(x) > 0$ pour tout x réel.

3) a) Comme $e^x - x > 0$ pour tout x réel alors la fonction g est bien définie sur \mathbb{R} .

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$g(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - \frac{x}{e^x}}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

La courbe représentant g admet en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et en $+\infty$ une asymptote d'équation $y = 1$.

c) $g'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2}$

$$g'(x) = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{f(x)}{(e^x - x)^2}$$

$g'(x)$ est du signe de $f(x)$.

De la question 1), on déduit le tableau des variations de g :

x	$-\infty$	α	β	$+\infty$
g'	-		+	-
g(x)	0	m	M	1

$$m = g(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha} = \frac{\frac{1}{2 - \alpha} - 1}{\frac{1}{2 - \alpha} - \alpha} = \frac{1 - 2 + \alpha}{1 - \alpha(2 - \alpha)} = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} = \frac{1}{\alpha - 1} \approx -0,47.$$

CORRECTION

$$\text{De même } M = g(\beta) = \frac{1}{\beta - 1} \approx 1,19$$

Courbes représentant f et g dans un repère

:

