Exercices avec solutions: sur les suites numériques

1 Définition de suites

Pour toutes les suites (u_n) définies ci-dessous, on demande de calculer u_1, u_2, u_3 et u_6.

1. $u_n = \dfrac{7n-2}{n+4}$.
2. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$
3. u_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre premier.
4. u_n est la somme des n premiers nombres pairs strictement positifs.
5. u_n est le nombre de diviseurs positifs de n.
6. Je place 1 000 **Dh** sur mon livret A au taux de 2,5% par an.
   u_n est la somme dont je dispose la $n^{\text{ième}}$ année.
7. u_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale du nombre π.

2 Sens de variation d'une suite

Étudier le sens de variation des suites (u_n) définies ci-dessous :

1. $u_n = 3n - 5$.
2. $u_n = -n^2 + 5n - 2$.
3. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.
4. $u_n = \dfrac{3^n}{2}$.
5. $u_n = \sqrt{n^2+3}$.
6. $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
7. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$.
8. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$.
9. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. *(plus difficile)*

Exercices avec solutions: sur les suites numériques

3 Majoration, minoration

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, par $u_n = 5 - \dfrac{1}{n}$.
   Montrer que la suite (u_n) est bornée.
2. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) est majorée par 2.
   (b) Montrer que la suite (u_n) est minorée par $\dfrac{1}{2}$.
3. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = -n^2 + 8n + 1$.
   Montrer que (u_n) est majorée par 17.
4. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
   Montrer que (u_n) est majorée et minorée.

4 Suites arithmétiques

Les questions sont indépendantes.

1. On définit pour tout n la suite (u_n) par : $u_n = 3n - 2$.
   Montrer que (u_n) est une suite arithmétique.
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $\dfrac{1}{3}$.
   Calculer le $9^{\text{ième}}$ terme, puis la somme : $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8$.
3. Soit (v_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison -2.
   Calculer u_{15}, puis la somme : $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15}$.
4. Calculer : $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$.

5 Suites géométriques

Les questions sont indépendantes

1. Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{7^{n+1}}{5}$.
   Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
2. Soit u_n une suite géométrique de premier terme $u_1 = \dfrac{1}{81}$ et de raison -3.
   Calculer u_7, puis $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7$.
3. Calculer $\Sigma = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 4\ 096$.

Exercices avec solutions: sur les suites numériques

Les exercices qui suivent sont des extraits d'annales de bac. Il est assez fréquent d'avoir des suites le jour du bac et une grande partie de leur étude a été faite en première, vous êtes donc déjà très forts.

6 Suite "arithmético-géométrique"

Exercice très classique que vous avez de fortes chances de retrouver dans l'année.

On considère la suite (u_n) de nombres réels, définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$$

et la relation initiale $u_0 = 2$.

1. Calculer $u_1,\ u_2$ et u_3.
2. (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 6$.
   Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Calculer $S = v_0 + v_1 + \ldots + v_9$ puis $S' = u_0 + u_1 + \ldots + u_9$.

7 Augmentation de loyer

Une personne loue une maison `a partir du premier janvier 1991. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial est de 4 800 **dh** et le locataire s'engage `a occuper la maison pendant 9 ann´ees compl`etes.

Les valeurs décimales seront arrondies, si nécessaire, au centime près.

1. **Contrat n°1 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle de 5% du loyer de l'année précédente.
   (a) Calculer le loyer u_1 payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer u_n (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de n.
   (c) Calculer u_8.
   (d) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat.
2. **Contrat n°2 :** Le locataire accepte une augmentation annuelle forfaitaire de 300 **dh** du loyer de l'ann´ee pr´ec´edente.
   (a) Calculer le loyer v_1 payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer v_n (loyer payé lors de la $(n+1)^{\text{ième}}$ année) en fonction de n.
   (c) Calculer la somme payée à l'issue des 9 années de contrat. Quel est le contrat le plus avantageux ?

Exercices avec solutions: sur les suites numériques

8 Suites et représentation graphique

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$$

1. Calculer $u_1,\ u_2,\ u_3$ d'une part et $v_1,\ v_2,\ v_3$ d'autre part.
2. Dans un repère orthonormal $(\text{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, d'unité graphique 5 cm, tracer les droites D et Δ d'équations respectives $y = \dfrac{3x+1}{4}$ et $y = x$.
   Utiliser D et Δ pour construire sur l'axe des abscisses les points $A_1,\ A_2,\ A_3$ d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$ ainsi que les points $B_1,\ B_2,\ B_3$ d'abscisses respectives $v_1,\ v_2,\ v_3$.
3. On considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n par : $s_n = u_n + v_n$.
   (a) Calculer s_0 , $s_1,\ s_2$ et s_3. À partir de ces résultats, que peut-on conjecturer pour la suite (s_n) ?
   (b) On admet que la suite (s_n) est une suite constante égale à 2. (la démonstration n'est pas du programme de première)
4. On considère la suite (d_n) définie pour tout entier naturel n par : $d_n = v_n - u_n$.
   (a) Montrer que la suite (d_n) est géométrique.
   (b) Donner l'expression de d_n en fonction de n.
5. En utilisant les questions **3.(b)** et **4.(b)**, donner l'expression de u_n et de v_n en fonction de n.

Exercices avec solutions: sur les suites numériques

Aide et rappel de cours

2 Sens de variation d'une suite

Définition :

- Un suite (u_n) est croissante à partir d'un rang n_0 ssi :

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} \geqslant u_n.$$

- Un suite (u_n) est décroissante à partir d'un rang n_0 ssi :

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Pour étudier le sens d'une variation, vous avez le choix entre les trois méthodes ci-dessous, et quelquefois c'est dur d'avoir le choix.... Il faut vous fiez à votre expérience et à votre maîtrise des calculs.

Méthodes :

- La suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ssi

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0 \text{ alors } u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

- **Pour une suite dont tous les termes sont strictement positifs.**
  La suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ssi

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0 \text{ alors } u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

- Soit la suite u_n définie par $u_n = f(n)$.
  Si la fonction f est croissante sur l'intervalle $[n_0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0.
  Attention, pour cette dernière propriété, la réciproque est fausse.

Il y a des propriétés correspondantes pour une suite décroissante.

3 Majoration, minoration

Définition :

- Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$$

- Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$$

- Une suite est bornée, lorsqu'elle est majorée et minorée.

Méthodes :

Pour montrer qu'une suite est majorée par un réel M, on peut :

- Travailler sur des inégalités.
- Montrer que la différence $u_n - M$ est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $u_n = f(n)$, montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

4 Suites arithmétiques

- Une suite (u_n) est dite arithmétique de raison r $(r \in \mathbb{R})$ si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on prouve que la différence $u_{n+1} - u_n$ est indépendante de n.

- Le premier terme est u_0 :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$.
- Le premier terme est u_1 :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- Somme des premiers termes :
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$.
Certains préfèrent le retenir sous une des formes suivantes :

$$\text{nombre de termes } \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

ou bien : nombre de termes $\times$ moyenne entre le premier et le dernier terme.

5 Suites géométriques

- Une suite (u_n) est dite géométrique de raison q $(q \in \mathbb{R})$ si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$$

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on part de u_{n+1} et on cherche à l'écrire en fonction de u_n.

- Le premier terme est u_0 :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.
- Le premier terme est u_1 :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
- Somme des premiers termes :
Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
Certains préfèrent le retenir sous la forme suivante :

$$\text{premier terme } \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

6 Suite "arithmético-géométrique"

- Pour la question 2 : On écrit v_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis en fonction de u_n, puis en fonction de v_n.
- Pour la question 4 : Je sais calculer la somme des termes d'une suite géométrique...

7 Augmentation de loyer

- Pour augmenter une somme de $t\%$, je la multiplie par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$.
- Pour le contrat 1, je reconnais une suite géométrique.
- Pour le contrat 2, je reconnais une suite arithmétique.

III Correction

1 Définition de suites

1. $u_1 = \dfrac{7\times 1-2}{1+4} = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = \dfrac{19}{7}$ et $u_6 = 4$.
2. $u_1 = 2u_0+3 = 7,\ u_2 = 2u_1+3 = 17,\ u_3 = 37$, c'est une suite définie par récurrence, donc pour calculer u_6, je dois connaître u_4 et u_5.
   $u_4 = 2u_3+3 = 77,\ u_5 = 2u_4+3 = 157$ et enfin $u_6 = 2u_5+3 = 317$.
3. $u_1 = 2$ (1 n'est pas un nombre premier), $u_2 = 3,\ u_3 = 5$ et $u_6 = 13$.
4. $u_1 = 2,\ u_2 = 2+4 = 6,\ u_3 = 2+4+6 = 12$ et $u_6 = 2+4+6+8+10+12 = 42$.
5. $u_1 = 1\ u_2 = 2, u_3 = 2$ et $u_6 = 4$.
6. Pour augmenter un nombre de $t\%$, je le multiplie par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$.
   $u_1 = 1\ 000\times 1,025 = 1\ 025,\ u_2 = u_1\times 1,025 = 1\ 000\times (1,025)^2 \approx 1\ 050{,}63$
   $u_3 = 1\ 000\times (1,025)^3 \approx 1\ 076{,}89$ et $u_6 = 1\ 000\times (1,025)^6 \approx 1\ 159{,}69$.
7. $u_1 = 1,\ u_2 = 4,\ u_3 = 1$ et $u_6 = 2$.

2 Sens de variation d'une suite

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 3(n+1)-5 = 3n-2$, donc :
   $u_{n+1}-u_n = (3n-2)-(3n-5) = 3 > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n = -(n+1)^2+5(n+1)-2-(-n^2+5n-2) = -2n+4$. Or $-2n+4$ est positif ssi $n\leqslant 2$ et négatif ssi $n\geqslant 2$, donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.
3. Exemple d'utilisation des trois méthodes sur la même suite.
   - Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{n+2}{n+3}-\dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$, or $n+2>0$ et $n+3>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite (u_n) est croissante.
   - Tous les termes de la suite sont strictement positifs.
     Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+2}{n+3}\times\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3}$, or $n^2+4n+4 > n^2+4n+3$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et la suite (u_n) est croissante.
   - On a : $u_n = f(n)$, avec $f : x\mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$.
     f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = \dfrac{1(x+2)-1(x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la suite (u_n) est croissante.
4. Tous les termes de la suite sont strictement positifs.
   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{2}\times\dfrac{2}{3^n} = 3 > 1$, donc la suite (u_n) est croissante.

5. On a : $u_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$

   f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ **alors** (u_n) est croissante

6. - Je ne peux pas appliquer la méthode du quotient car tous les termes de la suite ne sont pas strictement positifs.
   - Je ne peux pas appliquer la méthode utilisant une fonction car je ne sais pas étudier les variations de $x \mapsto \left(-\dfrac{1}{2}\right)^x$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
     $u_{n+1} - u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \times \left(-\dfrac{1}{2} - 1\right) = -\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
     Or l'expression $-\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ est positive lorsque n est impair et elle est négative lorsque n est pair, donc la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3$ et la suite (u_n) est croissante.
8. Tous les termes de la suite sont strictement positifs. (pour le prouver rigoureusement, il faudrait une méthode de démonstration qui est au programme de terminale, mais nous l'admettons ici)

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1$, donc la suite (u_n) est décroissante.
9. Je pose $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0;+\infty[$, par : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

   f est dérivable sur $]0;+\infty[$, et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$.

   Or $x+1 \geqslant x > 0$ donc $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{x} > 0$ et $f'(x) \leqslant 0$. La fonction f est donc décroissante sur $]0;+\infty[$ et (u_n) est décroissante.

3 Majoration, minoration

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $-\dfrac{1}{n} < 0$ donc $u_n < 5$ et la suite est majorée par 5.

   D'autre part : $n \geqslant 1$ donc $\dfrac{1}{n} \leqslant 1$ et $u_n = 5 - \dfrac{1}{n} \geqslant 4$, donc (u_n) est minorée par 4.

   La suite (u_n) est bien bornée.
2. Je traite les deux questions par deux méthodes différentes.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - 2 = \dfrac{2n+1}{n+2} - 2 = \dfrac{2n+1-2(n+2)}{n+2} = \dfrac{-3}{n+2}$.

   Or $n+3 > 0$, donc $\dfrac{-3}{n+2} < 0$ et $u_n - 2 < 0$, ce qui donne $u_n < 2$.

   La suite est majorée par 2.

   (b) Soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+2}$, f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et

   $f'(x) = \dfrac{2(x+2) - 1(2x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0$.

   La fonction f est donc croissante, de plus $f(0) = \dfrac{1}{2}$, donc f est minorée par $\dfrac{1}{2}$ et par conséquent (u_n) aussi.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - 17 = -n^2 + 8n + 1 - 17 = -n^2 + 8n - 16 = -(n+4)^2 < 0$.
   Donc $u_n < 17$ et la suite (u_n) est majorée par 17.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.
   Or $n \geqslant 0$, donc $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leqslant 1$. (Car la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$.)
   Finalement $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc la suite (u_n) est bornée par 0 et 1.

4 Suites arithmétiques

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$, donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$
2. Le $9^{\text{ième}}$ terme est $u_8 = 5 + 8 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{23}{3}$
   $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = 9 \times \dfrac{5 + \frac{23}{3}}{2} = 57$.
3. $u_{15} = u_1 + 14 \times (-2) = -26, \quad u_7 = u_1 + 6 \times (-2) = -10$,
   et $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15} = 9 \times \dfrac{-10 - 26}{2} = -162$.
4. $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$ est la somme des termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 11$ et de raison $r = 3$.
   Soit n l'indice du dernier terme : $u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow 173 = 11 + n \times 3 \Leftrightarrow n = 54$, il y a donc 55 termes dans la somme et : $S = 55 \times \dfrac{11 + 173}{2} = 5\ 060$.

5 Suites géométriques

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{7^{n+2}}{5} = 7 \times \dfrac{7^{n+1}}{5} = 7u_n$, donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{7}{5}$ et de raison 7.
2. $u_7 = u_1 \times (-3)^6 = \dfrac{1}{81} \times (-3)^6 = 9$ et $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7 = \dfrac{1}{81} \times \dfrac{1 - (-3)^7}{1 - (-3)} = \dfrac{547}{81}$.
3. Σ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2
   Je cherche l'indice n du dernier terme : $u_n = u_0 q^n \Leftrightarrow 4\ 096 = 1 \times 2^n \Leftrightarrow n = 12$
   donc $\Sigma = 1 \times \dfrac{1 - 2^{13}}{1 - 2} = 8\ 191$.
   Remarque : Nous ne savons pas, pour l'instant, résoudre l'équation $2^n = 4\ 096$. Il faut faire des essais sur la calculatrice.

6 Suite "arithmético-géométrique"

1. Calculer $u_1 = 4,\ u_2 = 5$ et $u_3 = \dfrac{11}{2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{1}{2}\,u_n + 3 - 6 \\ &= \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3 \\ &= \frac{1}{2}\,v_n \end{aligned}$.

   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$
3. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = -4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 6$.
4. On a : $S = -4 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = -\dfrac{1\ 023}{128}$

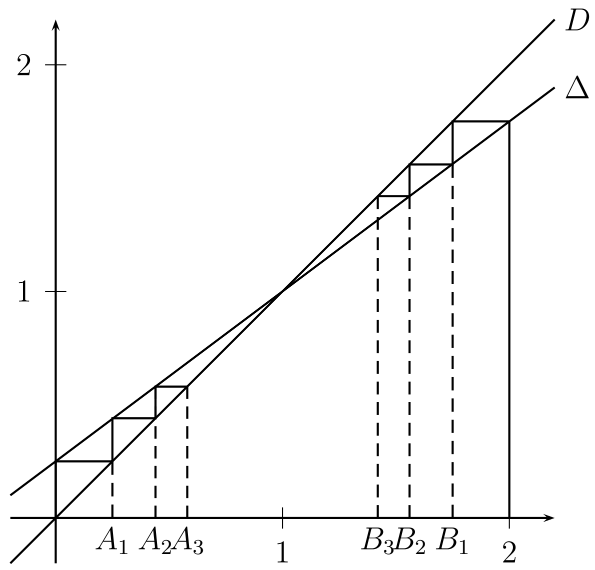
   et $S' = u_0 + u_1 \ldots + u_9 = v_0 + 6 + v_1 + 6 + \ldots v_9 + 6 = -\dfrac{1\ 023}{128} + 6 \times 10 = \dfrac{6\ 657}{128}$.

7 Augmentation de loyer

1. **Contrat n°1 :**
   (a) $u_1 = 4\ 800 \times 1,05 = 5\ 040$.
   (b) $u_n = 4\ 800 \times 1,05^n$, c'est suite géométrique.
   (c) $u_8 = 4\ 800 \times 1,05^8 \approx 7\ 091{,}79$.
   (d) $u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = 4\ 800 \times \dfrac{1 - 1,05^9}{1 - 1,05} \approx 52\ 927{,}51$
2. **Contrat n°2 :**
   (a) $v_1 = v_0 + 300 = 5\ 100$.
   (b) $v_n = 4\ 800 + 300n$, c'est une suite arithmétique.
   (c) $v_8 = 7\ 200$
   (d) $v_0 + v_1 + \ldots + v_8 = 9 \times \dfrac{4\ 800 + 7\ 200}{2} = 54\ 000$. Le premier contrat est donc plus avantageux pour le locataire.

8 Suites et représentation graphique

1. $u_1 = \dfrac{1}{4},\ u_2 = \dfrac{7}{16},\ u_3 = \dfrac{37}{64}$ et $v_1 = \dfrac{7}{4},\ v_2 = \dfrac{25}{16},\ v_3 = \dfrac{91}{64}$.



3. $s_0 = 2$, $s_1 = 2$, $s_3 = 2$ et $s_3 = 2$. On peut conjecturer que la suite (s_n) est constante égale à 2.
4. (a) Pout tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} d_{n+1} = &\ v_{n+1} - u_{n+1} \\ &\ \frac{3v_n+1}{4} - \frac{3u_n+1}{4} \\ &= \frac{3}{4}(v_n - u_n) \\ &= \frac{3}{4}d_n \end{aligned}$$
Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, d_n = d_0 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 2\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.
5. On a : $\begin{cases} v_n + u_n = s_n \\ v_n - u_n = d_n \end{cases}$ ssi $\begin{cases} v_n = \dfrac{s_n + d_n}{2} \\ u_n = \dfrac{s_n - d_n}{2} \end{cases}$, donc $\begin{cases} v_n = 1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \\ u_n = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \end{cases}$.