Exercices avec corrigés

Fonction : Polynômes du deuxième degré

Polynômes du deuxième degré : Racines, axe de symétrie, sommet ensemble des valeurs, forme canonique, factorisation Et graphiques.

Exercice 1

En complétant le carré, transformer l'expression suivante, puis, si possible, factoriser l'expression

$$-3x^2 + 10x - 7$$

Exercice 2

a) Dans un même repère, représenter graphiquement les deux fonctions

$$f(x) = x^2 - 6x + 10 \qquad \text{et} \qquad g(x) = 16 - x^2$$

b) Calculer les coordonnées de leurs points d'intersection (valeurs numériques approchées).

Exercice 3

a) Représentez graphiquement les deux fonctions

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

$$g(x) = -2(x+1)^2 + 3$$

b) Déterminez les coordonnées des points d'intersection.

Exercice 4

D'une parabole, on donne les 3 points

$$A(1;0),\ B(4;3),\ C(5;0)$$

a) Déterminez l'abscisse du sommet.
b) Déterminez l'équation de la parabole.
c) Déterminez l'ordonnée du sommet.

Exercice 5

On considère une parabole et une famille de droites dépendant d'un paramètre réel m

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 \qquad \text{et} \qquad g(x) = mx$$

a) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la droite est tangente à la parabole.
b) Esquisser la situation.

Polynômes du deuxième degré - Corrigés

Corrigé de l'exercice 1

$$\begin{aligned}
-3x^2+10x-7 &= -3\left(x^2-\frac{10}{3}x+\frac{7}{3}\right)\\
&= -3\left(x^2-\frac{10}{3}x+\frac{25}{9}-\frac{25}{9}+\frac{7}{3}\right)\\
&= -3\left(\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right)\\
&= -3\left(\left(x-\frac{5}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)\\
&= -3\left(x-\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{5}{3}+\frac{2}{3}\right)\\
&= -3\left(x-\frac{7}{3}\right)(x-1)\\
&= (-3x+7)(x-1)
\end{aligned}$$

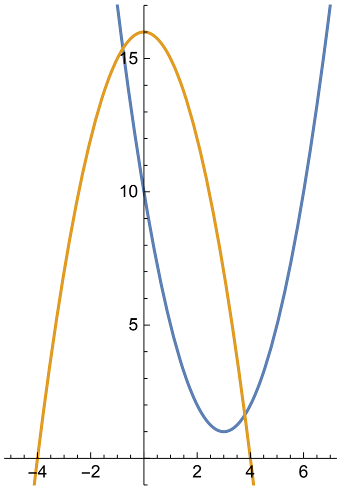
Corrigé de l'exercice 2

Parabole f : sommet $(3;1)$

x	-1	0	1	2	3
y=f(x)	17	10	5	2	1

Parabole g : sommet $(0;16)$

x	0	2	3	4
y=g(x)	16	12	7	0

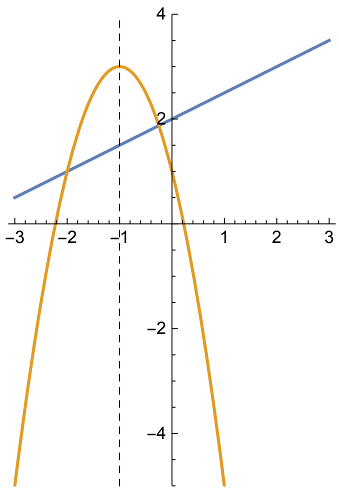


Intersection

$$x^2 - 6x + 10 = 16 - x^2$$
$$x^2 - 6x + 10 - 16 + x^2 = 0$$
$$2x^2 - 6x - 6 = 0$$
$$x^2 - 3x - 3 = 0$$
$$\Delta = 21,\ x_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2} \simeq -0.791; \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \simeq 3.79;$$
$$y_1 = 16 - x_1^2 \simeq 15.37; \quad y_2 = 16 - x_2^2 \simeq 1.626;$$
$$P_1\left(x_1; y_1\right) \simeq (-0.791; 15.37); \quad P_2\left(x_2; y_2\right) \simeq (3.79; 1.626)$$

Corrigé de l'exercice 3

a) f est une fonction affine d'ordonnée à l'origine 2 et de pente $\frac{1}{2}$.
Le graphe de g est une parabole d'axe de symétrie $x = -1$ et de sommet $S(-1; 3)$.



b) Intersection

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{et} \quad y = -2(x+1)^2 + 3$$
$$\frac{1}{2}x + 2 = -2(x+1)^2 + 3$$
$$\frac{1}{2}x + 2 = -2x^2 - 4x + 1$$

$$4x^2+9x+2=0$$
$$\Delta=49,\ x_1=-2,\ x_2=-\frac{1}{4}$$
$$y_1=\frac{1}{2}x_1+2=1,\ y_2=\frac{1}{2}x_1+2=\frac{15}{8}\simeq 1.875$$
$$P_1(-2;1)\ ,\ P_2\left(-\frac{1}{4};\frac{15}{8}\right)$$

Corrigé de l'exercice 4

a)

$$x_S=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+5}{2}=3$$

b)

$$f(x)=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)=a(x-1)(x-5)\quad \text{passe par } (4;3)$$
$$a(4-1)(4-5)=3 \implies a=\frac{3}{-3}=-1$$
$$f(x)=-(x-1)(x-5)$$

c)

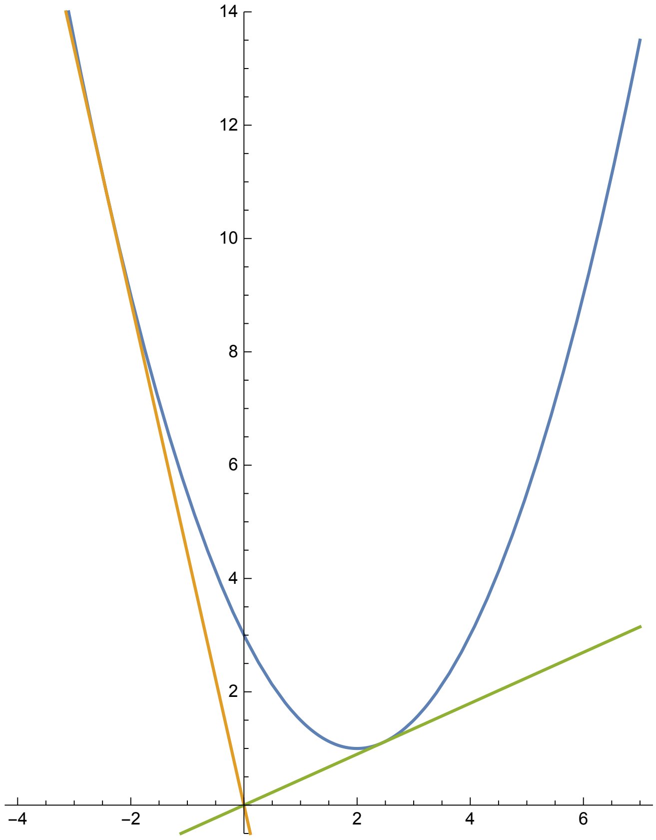
$$y=f(3)=4$$

Corrigé de l'exercice 5

$$f(x)=g(x)$$
$$\frac{1}{2}x^2-2x+3=mx$$
$$\frac{1}{2}x^2+(-m-2)x+3=mx$$

La droite est tangente à la parabole si et seulement si l'équation possède une et une seule solution, c'est-à-dire si et seulement si le discriminant est nul

$$\Delta=(-m-2)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 3=0$$
$$m^2+4m-2=0$$
$$m_1=\frac{-4-\sqrt{24}}{2}=-2-\sqrt{6}\simeq -4.449;\quad m_2=\frac{-4+\sqrt{24}}{2}=-2+\sqrt{6}\simeq 0.449$$


14
12
10
8
6
4
2
−4
−2
2
4
6