

ETUDE DES FONCTIONS

I) DERIVATION ET MONOTONIE D'UNE FONCTION

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- 1) f est croissante sur I ssi f' est positive sur I .
- 2) f est décroissante sur I ssi f' est négative sur I .
- 3) f est constante sur I ssi f' est nulle sur I .

II) DERIVATION ET EXTREMUMS

Propriété : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a) = 0$

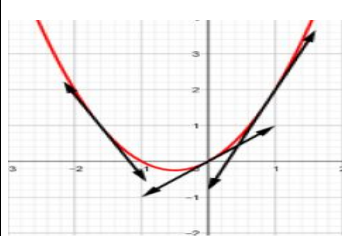
Propriété : Si f est dérivable en a et admet un extremum en a , alors sa courbe représentative

Admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

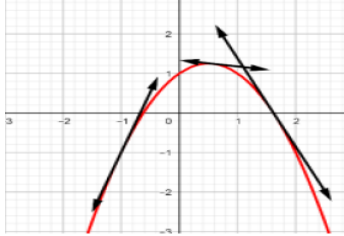
III) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION

Définition : Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f .

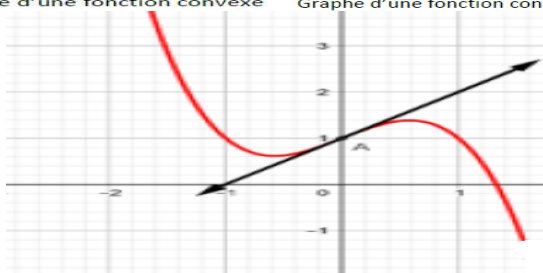
- 1) On dit que la courbe est convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes
- 2) On dit que la courbe est concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.
- 3) Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe C_f



Graphique d'une fonction convexe



Graphique d'une fonction concave



Point d'inflexion en A

Remarque : Si f est dérivable en a et C_f traverse sa tangente en A alors le point A est un point d'inflexion

Théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- 1) Si f'' est positive sur I alors C_f est convexe sur I .
 - 2) Si f'' est négative sur I alors C_f est concave sur I .
 - 3) Si f'' s'annule en a en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$
- sont les points d'inflexions de (C_f)

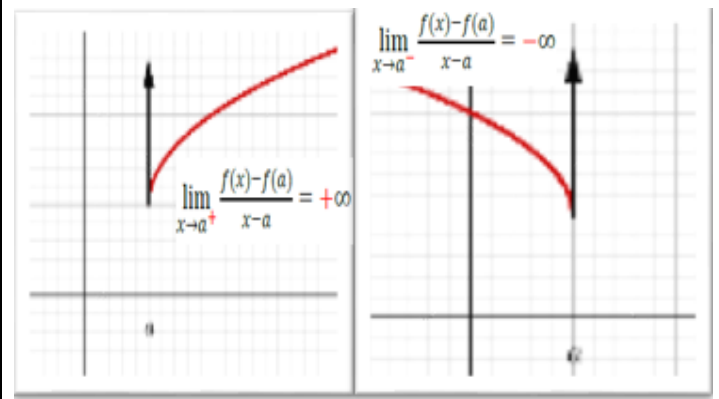
IV) DEMI-TANGENTE VERTICALE

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$

Si f est continue à droite de a et $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$

Alors la courbe C_f admet une demi-tangente verticale à droite de a .

Interprétation géométriques



V) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

1) Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f .

La droite $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si et seulement si :

- a) $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$
- b) $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = f(x))$

2) Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f .

Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f si et seulement si :

- a) $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$
- b) $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = 2b - f(x))$

Remarques :

- 1) Si une fonction est paire alors l'axe (Oy) . Est un axe symétrie à la courbe
- 2) Si une fonction est impaire alors Le point $O(0;0)$ est un centre symétrie la courbe

VI) Etude d'asymptotes et de branches infinies

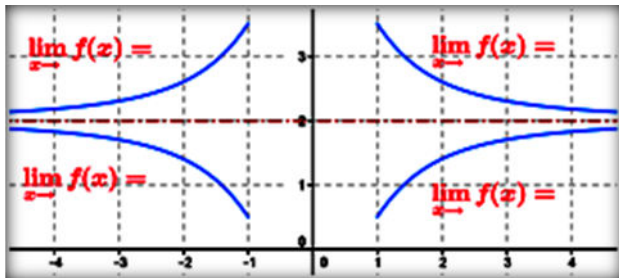
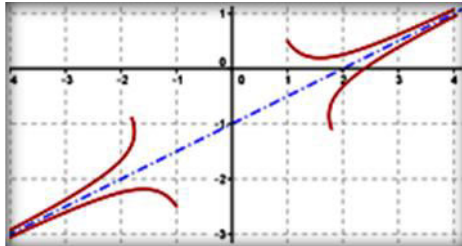
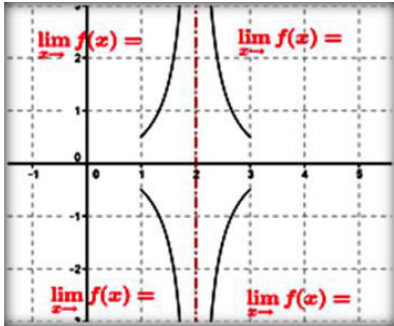
L'étude des branches infinies a pour objectif de comprendre en détails le comportement de la courbe de la fonction

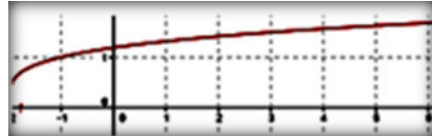
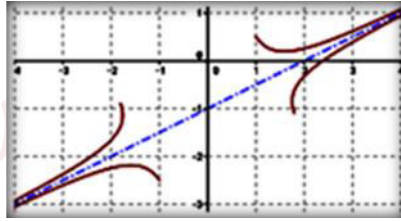
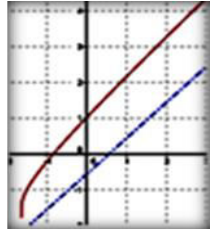
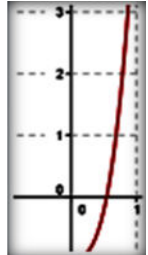
La première chose à faire est de calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction

Voir le tableau suivant :



II) BRANCHES INFINIES.

Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$	Si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$
	La droite $(\Delta) : y = ax + b$ est une Asymptôte oblique à (C_f) signifie que : $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ 	
La droite (Δ) d'équation $y = b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞	(C_f) est au dessus de $(\Delta) \Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) > 0$ (C_f) est en dessous de $(\Delta) \Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) < 0$	La droite (Δ) d'équation $x = a$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de a

Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$			
Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$		Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$
	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \infty$	
			
La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox)	La droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞.	La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D), d'équation $y = ax$	La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy)