

LA DERIVATION

A) Dérivation en un point et Dérivé à droite et dérivé à gauche.

1) f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre a .

f est dérivable en a si la limite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et est

finie le note $f'(a)$: Le nombre dérivé de la fonction f en a

2) f est dérivable en a ssi $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ Finie

3) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$ où $r > 0$

f est dérivable à droite de a si la limite $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

existe et est finie : $f'_d(a)$

2) f une fonction définie sur un intervalle de la forme $] a - r, a]$ où $r > 0$

f est dérivable à gauche de a si la limite $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

existe et est finie : $f'_g(a)$

3) f est dérivable en a ssi elle dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

4) Toute fonction dérivable en a est continue en a .

B) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) si f est dérivable en a . f admet une fonction affine tangente en a de la forme : $u(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$

2) Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative C_f admet une tangente (T) en

$A(a, f(a))$ d'équation : (T): $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

3) Si f est dérivable à droite de a , alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a :

$(T_d) : y = f'_d(a)(x - a) + f(a) : x \geq a$

4) Si f est dérivable à gauche de a , alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a :

$(T_g) : y = f'_g(a)(x - a) + f(a) : x \leq a$

5) Si f est dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ on dit que la courbe représente un point anguleux en $A(a, f(a))$

C) Dérivabilité sur un intervalle.

1) f est dérivable sur l'ouvert $] a, b[$ si elle est dérivable en tout point de $] a, b[$

2) f est dérivable sur le semi-ouvert $[a, b[$ si elle est dérivable sur $] a, b[$ et dérivable à droite de a

3 f est dérivable sur le fermé $[a, b]$ si elle est dérivable sur $] a, b[$ et dérivable à droite de a et à gauche de b

Remarque : La fonction \arctan est dérivable sur \mathbb{R} et

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

D) Monotonie et extremums d'une fonction : concavité ; points d'inflexions

1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$

Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a) = 0$

2) Si f est dérivable en a et admet un extremum en a , alors sa courbe représentative

admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

3) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

4) a) f' est positive sur I ssi f est croissante sur I .

b) f' est négative sur I ssi f est décroissante

c) f' est nulle sur I ssi f est constante sur I .

5) Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement croissante sur I

6) Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement négative sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement décroissante sur I

7) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.

Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a

8) f est deux fois dérivable sur un intervalle I .

a) Si f'' est positive sur I alors C_f est convexe sur I .

b) Si f'' est négative sur I alors C_f est concave sur I .

c) Si f'' s'annule en a en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

1) Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $] a, b[$ et telle que : $f(a) = f(b)$. Alors il existe un réel $c \in] a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

2) Théorème des accroissements finies T.A.F :

a) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $] a, b[$ Alors il existe un réel $c \in] a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

b) Inégalité des accroissements finies I.A.F :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $] a, b[$ S'ils existent deux réels M et m tels que :

$$m \leq f'(x) \leq M \quad \forall x \in] a, b[$$

$$\text{Alors : } m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

3) Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si f est dérivable sur I

et $(\forall x \in I)(|f'(x)| \leq k$ (où $k \in \mathbb{R}^{*+}$)

Alors : $(\forall (x, y) \in I^2)(|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|)$