

## LES SUITES NUMERIQUES

Soit  $(u_n)_{n \in I}$  une suite numérique.

### A) Suite majorée minorée bornée croissante décroissante convergente

•  $(u_n)_{n \in I}$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que :

$$\forall n \in I \quad u_n \leq M$$

•  $(u_n)_{n \in I}$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que :  $m \leq u_n$

$$\forall n \in I$$

• Une suite est bornée si elle est majorée et minorée.

$(u_n)_{n \in I}$  est bornée ssi s'il existe un réel positif  $M$  tel que :

$$\forall n \in I \quad |u_n| \leq M$$

• La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est croissante ssi :  $\forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$

• La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est décroissante ssi  $\forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$

• Une suite qui tend vers une limite finie  $l$  s'appelle une suite convergente sinon elle est dite divergente

• Toute suite convergente est bornée

• Si une suite admet une limite finie  $l$  cette limite est unique

• Toute suite croissante et majorée est convergente.

• Toute suite décroissante et minorée est convergente

• Toute suite croissante et non majorée tend vers  $+\infty$

• Toute suite décroissante et non minorée tend vers  $-\infty$

### B) Suite arithmétique : $(u_n)_{n \in I}$ arithmétique: ssi $\forall n \in I$

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{Le réel } r \text{ la raison de la suite}$$

si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite arithmétique de raison  $r$  et  $u_p$  l'un de ses termes.

$$1) u_n = u_p + (n - p)r \quad \forall n \in I$$

$$2) s_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n - p + 1)}{2} (u_p + u_n)$$

### C) Suite géométrique : $(u_n)_{n \in I}$ géométrique ssi

$$u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in I \quad q \text{ s'appelle la raison de la suite.}$$

Si  $(u_n)_{n \in I}$  est une suite géométrique de raison  $q$  et si  $p$  est un entier naturel alors :

$$1) u_n = q^{n-p} u_p \quad \forall n \in I$$

$$2) s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

$$\text{Si } q = 1 \text{ alors : } s_n = (n - p + 1)u_p$$

$$\text{Si } q \neq 1 \text{ alors : } s_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

**D) Suite et limites :1)** On dit que la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $+\infty$  (quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ) ssi :

$$(\forall A > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow u_n > A)$$

on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

2) On dit que la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $-\infty$  (quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ) ssi  $(\forall A > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow u_n < -A)$

on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} -u_n = +\infty$$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty ; \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad p \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$$

5) la suite  $(u_n)_n$  tend vers  $l$  ssi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon)$$

on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0 ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad p \in \mathbb{N}^* \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$$

### E) Opération sur les limites des suites.

#### 1) Limite de la somme :

$\lim u_n$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
					Formes indéterminées

#### 2) Limites des produits

$\lim u_n$	$l$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$0$
$\lim(u_n \times v_n)$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
				Formes indéterminées

#### 3) Limites des inverses

$\lim u_n$	$l \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$\pm\infty$
$\lim \left(\frac{1}{u_n}\right)_n$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	$0$

#### 4) Limites des quotients

$\lim u_n$	$l$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$0$	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$
$\lim \left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
					Formes indéterminées

$$\lim |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = 0$$

**Remarques :** 1) La limite d'une suite polynôme est la limite de son plus grand terme

2) La limite d'une suite rationnelle est la limite du rapport des termes de plus grand degré

### F) limites et l'ordre et techniques de calculs des limites :

**limites :**  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des suites

1) si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergente vers  $L$  et :  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)$  :

$$u_n \geq 0 \quad \text{Alors : } L \geq 0$$

2) si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergentes tels que :

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n) \quad \text{Alors : } \lim v_n \leq \lim u_n$$

3) si  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n)$  et  $\lim v_n = +\infty$  alors :

$$\lim u_n = +\infty$$

4) si :  $(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(v_n \leq u_n)$  et  $\lim u_n = -\infty$

$$\text{alors : } \lim v_n = -\infty$$

5) si  $l$  un réel. tels que:  $|u_n - l| \leq v_n \quad \forall n \geq p$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

6) si  $w_n < u_n < v_n$  et  $\forall n \geq p$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$

$$\text{Alors : } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

### G) Suite de la forme : $v_n = f(u_n)$

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  ; et  $(u_n)$  une suite numérique telle que

$$(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)(u_n \in I)$$

Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et  $f$  continue en  $l$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(l)$$

### H) limite de Suite de la forme : $a^n$ et $n^p$

1) a) si  $a > 1$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$

b) si  $-1 < a < 1$   $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$

c) si  $a \leq -1$  ( $a^n$ ) n'a pas de limites

2)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$  si  $p \in \mathbb{N}^*$

### I) Suite de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $(u_n)$  une suite numérique telle que :

a)  $f$  est continue sur  $I$

b)  $f(I) \subset I$

c)  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_{n+1} = f(u_n))$

d)  $u_0 \in I$  ( donc  $(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \in I)$  )

e)  $(u_n)$  est convergente

Alors la suite  $(u_n)$  tend vers  $l$  solution de l'équation

$$f(x) = x$$

### J) Les suites adjacentes :

1) deux suites numériques  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes si :

a)  $L$  une est croissante l'autre est décroissante.

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$$

2) Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont deux suites adjacentes et  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante alors

$$(\forall n \in \mathbb{N})(u_n \leq v_n)$$



*C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices*

*Que l'on devient un mathématicien*