

FONCTIONS PRIMITIVES

FONCTION PRIMITIVE D'UNE FONCTION

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I ;
On dit que la fonction F est une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I si :
1) F est dérivable sur I
2) $(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$

Propriété1: Si f est continue sur I alors f admet une fonction primitive sur I

Propriété2 : Si f admet une fonction primitive F sur I alors toutes les fonctions primitives de f sur I s'écrivent de la forme : $F + \lambda$ où λ est un réel.

Propriété3 : Si F_1 et F_2 sont deux fonction primitive d'une fonction f sur I alors :
 $(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Propriété4 : Si f admet une fonction primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0 fonction

Primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel

quelconque.

Propriété5 : Si F est une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I et G une fonction primitive de la fonction g sur l'intervalle I et α un réel alors :

1) $(F + G)$ est une fonction primitive de la fonction $(f + g)$ sur I

2) (αF) est une fonction primitive de la fonction (αf) sur I

Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive
α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha x + c$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$
x^r ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times \arctan(x) + c$



Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel. Mais grâce au tableau des opérations sur les fonctions dérivées on peut en déduire :

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u' u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u' \sqrt[n]{u}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u' u^r$ ($r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$)	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'$ ou $u \times v'$	$u \times v + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$\arctan(u) + C$

La ligne en couleur gaule est une généralisation des 4 lignes précédentes.

Quelques formules utiles pour calculer les primitives

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\cos a \sin b = -\frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

Si $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien