PROF : ATMANI NAJIB ***La fonction logarithme népérien*** **2ème BAC Sciences ex (pc-svt…)**

La fonction logarithme népérien :

La fonction logarithme népérien notée ln est l'unique fonction, définie et dérivable sur]0, +∞ [et Vérifiant ln1= 0 et pour tout réel x > 0, $(\ln x)' = \frac{1}{x} \succ 0$

Il est continu et strictement croissant sur]0, +∞ [.

Premières propriétés (directement liées à la définition)

Pour tous réels : $\forall x \succ 0\ ; \forall y \succ 0\ ; \forall r \in \mathbb{Q}$

1) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ 2) $x \le y \Leftrightarrow \ln x \le \ln y$

3) $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ 4) $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

5) $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$ 6) $e \simeq 2{,}71828\cdots$ et $\ln(e) = 1$

7) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ 8) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

9) $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$ 10) $\ln(x^r) = r\ln x$

11) $\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ 12) $\left(e^{\ln x} = x\right) \ (\forall x \succ 0)$

13) $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall y \succ 0$

(Limites usuelles)

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ 2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0$ (où r ∈ $\mathbb{Q}_*^+$)

5) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^r \ln x = 0$ (où r ∈ $\mathbb{Q}_*^+$)

6) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Dérivée et primitives de la fonction $x \to \ln(u(x))$

1)Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors la fonction :$f(x) = \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et $(\forall x \in I)$ ($f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$)

2)Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $x \to \frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions ;$F(x) = \ln(|u(x)|) + Cte$

FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE a

Soit $(a \succ 0)$ et $(a \ne 1)$

On note $\log_a$ la fonction logarithmique de base $\boldsymbol{a}$ définie sur]0, +∞[par :$(\forall x \in]0,+\infty[)$ ($\log_a = \frac{\ln x}{\ln a}$)

$\forall x \succ 0\ ; \forall y \succ 0\ ; \forall r \in \mathbb{Q}$

1) $\log_a(x \times y) = \log_a x + \log_a y$ 2) $\log_a(1/x) = -\log_a x$

3) $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ 4) $\log_a\left(\sqrt{x}\right) = (1/2)\log_a x$

5) $\log_a(x^r) = r\log_a x$

6) $\log_e = \frac{\ln x}{\ln e} = \ln x$

$\forall x \in]0,+\infty[\ ; (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln a}$ donc La fonction $\log_a$ est une bijection de]0, +∞[vers $\mathbb{R}$

1) $(\forall x > 0)(\forall y > 0)(\ \log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y)$

2) $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\ \log_a(x) = r \Leftrightarrow x = a^r$

3) $\log_a$ strictement croissante si $(a \succ 1)$

$\log_a$ strictement décroissante si $(0 \prec a \prec 1)$

Cas particulier $a = 10$; logarithme décimal :

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par $\boldsymbol{log}$ et $(\forall x \in]0,+\infty[)$ ($\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$) et on a : $\log(10) = 1$

1) $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q})(\log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r)$

2) $(\forall r \in \mathbb{Q})(\ \log(10^r) = r$ 3) $\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.