

LIMITE ET CONTINUITE

1) LIMITE D'UNE FONCTION EN UN POINT COMPLEMENTS (limite à droite et à gauche et opérations sur les limites)

1) Résultats

Soient P et Q deux fonction polynôme et $x_0 \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$ alors :

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad 2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \text{ si } Q(x_0) \neq 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad 4) \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow x_0} \tan x = \tan x_0 \text{ si } x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \text{ si } x_0 \geq 0 \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Limite de la somme :

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si x tend vers a^+ ; a^- ; $+\infty$ ou $-\infty$

Limites des produits :

$\lim f$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limites des inverses :

$\lim f$	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Limites des quotients

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm \infty$	0	ℓ	0	$\pm \infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm \infty$	$\pm \infty$	$?$	$?$

2) Limites à droite et à gauche : RAPPELLES

Exemple : (Limites à droite et à gauche)

$$\text{Soit la fonction } f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$

Solution : Déterminons $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$?

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$\text{Si } -1 < x < 1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -\frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{Si } x < -1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

II) CONTINUITE D'UNE FONCTION NUMERIQUE EN UN POINT :

1) Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de centre a . On dit que la fonction f est continue en a si elle admet une limite finie en a et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

2) continuité à droite et à gauche

Définition : 1) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$ où $r > 0$

On dit que la fonction f est continue à droite de a si elle admet une limite finie à droite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) :$$

2) Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r; a]$ où $r > 0$

On dit que la fonction f est continue à gauche de a si elle admet une limite finie à gauche en a et $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

3) Prolongement par continuité

Théorème et définition : Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D_f ; a un réel tel que $a \notin D_f$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ (finie)

La fonction f définie par :
$$\begin{cases} f(x) = f(x); \text{ si } x \neq a \\ f(a) = l \end{cases}$$

Est une fonction continue en a et s'appelle un prolongement par continuité de la fonction f en a

III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

1) Continuité sur un intervalle

Définition : Soit f une fonction dont le domaine de définition est D_f , soit $]a, b[$ un intervalle inclus dans D_f

- 1) On dit que f est continue sur l'ouvert $]a, b[$ si elle est continue en tout point de $]a, b[$
- 2) On dit que f est continue sur $[a, b[$ si elle est continue sur $]a, b[$ et à droite de a
- 3) On dit que f est continue sur $[a, b]$ si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b

2) Opérations sur les fonctions continues

Propriétés : 1) Si f et g sont deux fonctions continues en a alors : a) $f + g$ b) $f \times g$ c) $|f|$

Sont des fonctions continues en a

2) Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a) \neq 0$ alors

a) $\frac{1}{g}$ b) $\frac{f}{g}$ sont des fonctions continues en a .

3) Si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors : $\sqrt{f}$ est continue en a

Remarque : La propriété précédente reste vraie soit à droite de a , à gauche de a ou sur un intervalle I (En tenant compte des conditions)

Propriétés : 1) Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$

2) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continue sur $\mathbb{R}$

3) Continuité de la composition de deux fonctions.

Théorème : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J tels que : $f(I) \subset J$ et x_0 un élément de I .

1) Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ alors

$g \circ f$ est continue en x_0 .

2) Si f est continue I et g continue en $f(I)$ alors $g \circ f$ est continue I .

4) Limite de $v \circ u$

Théorème : Soit u une fonction définie sur un intervalle pointé de centre x_0 telle $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$

si v est continue en l alors $\lim_{x \rightarrow x_0} (v \circ u)(x) = v(l)$

IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

Théorème : (Admis)

L'image d'un segment $[a, b]$ par une fonction continue est le segment $[m, M]$ où : $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ et $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$

Cas particulier :

1) Si f est continue croissante sur $[a, b]$ alors :

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

2) Si f est continue décroissante sur $[a, b]$ alors :

$$f([a, b]) = [f(b), f(a)]$$

2) Image d'un intervalle.

2.1 Théorème général

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque : L'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

2.2 Cas d'une fonction strictement monotone

a) f continue et strictement croissante sur L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$

$$f([a; b]) = [f(a); f(b)] \text{ et } f(]a; b[) = \left[\begin{array}{c} f(a); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \end{array} \right[$$
$$f(]a; b]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); f(b) \right[\text{ et } f([a; b]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$$

b) f continue et strictement décroissante sur L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$

$$f([a; b]) = [f(b); f(a)] \text{ et } f(]a; b]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); f(a) \right[$$
$$f(]a; b[) = \left[\begin{array}{c} f(b); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \end{array} \right[\text{ et } f([a; b]) = \left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$$

V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERE –

TVI. 1) Cas général

Théorème T.V.I : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

2) Cas f strictement monotone.

Théorème T.V.I (cas f strictement monotone)

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$.

Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$

Remarque : L'expression " Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un et un seul $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$ " peut-être formulée comme :

" Pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = \lambda$ admet une solution unique dans $[a, b]$

3) Corolaires

Corolaire1 (T.V.I) : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Corolaire2 (T.V.I) :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ il existe un et un seul c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = 0$

VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

1) Théorème : Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I , On a f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de

$J = f(I)$ vers I .

donc f est une bijection de I vers $f(I)$

D'où f admet une fonction réciproque f^{-1} de

$J = f(I)$ vers I et on a :

$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in f(I) \end{cases}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = x \quad \forall x \in f(I)$$

$$(f^{-1} \circ f)(y) = y \quad \forall y \in I$$

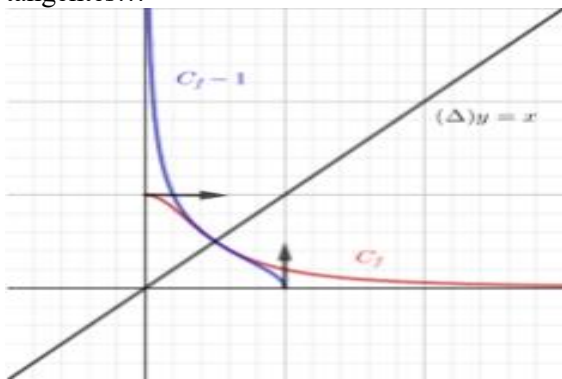
2) Propriété de la fonction réciproque

Propriété 1 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I .

Propriété 2 : Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors $(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques par rapport à $(\Delta) y = x$

Remarque :

La symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes...



3) La fonction racine n-ème

3.1 Définition et règles de calculs

Propriété et définition :

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; la fonction :

$f : x \rightarrow x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} de $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$

La fonction réciproque f^{-1} s'appelle la fonction racine n -ème et se note $\sqrt[n]{x}$

Conséquence de la définition :

1) La fonction $\sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \sqrt[n]{x} \geq 0$

3) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

4) La fonction $\sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ strictement croissante.

5) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$

6) $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall a \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$

$$7) (\forall a \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$$

$$8) (\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$$

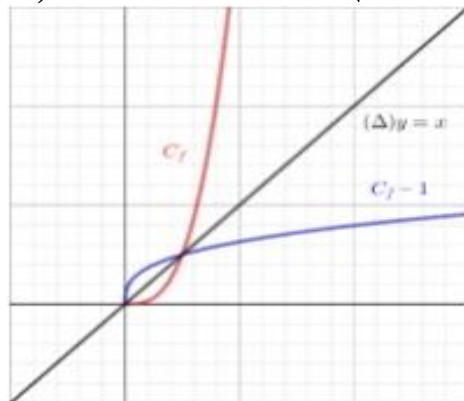
$$9) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall p \in \mathbb{N}) (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

$$11) \text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$$

$$12) \text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l \text{ et } l \geq 0 \text{ alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$$

13) La courbe de la fonction $\sqrt[n]{x}$



Règle de calcul :

$$1) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x \times y} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$$

$$2) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

$$3) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[n \times p]{x}$$

$$4) (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p}$$

(à prouver)

Remarque :

$$1) (\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

$$2) (\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[1]{x} = x$$

3.2 Résolution de l'équation $x^n = a$

Exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1) x^5 = 32 \quad 2) x^7 = -128 \quad 3) x^4 = 3 \quad 4) x^6 = -8$$

Solutions : 1) $x^5 = 32$ donc $x > 0$

$$x = \sqrt[5]{32} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{2^5} \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{donc : } S = \{2\}$$

$$2) x^7 = -128 \text{ donc } x < 0$$

$$\text{Donc : } x = -\sqrt[7]{128} \Leftrightarrow x = -\sqrt[7]{2^7} \Leftrightarrow x = -2$$

$$\text{Donc : } S = \{-2\}$$

$$3) x^4 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3} \text{ ou } x = -\sqrt[4]{3}$$

$$\text{Donc : } S = \{-\sqrt[4]{3}; \sqrt[4]{3}\}$$

$$4) x^6 = -8$$

On a $x^6 \geq 0$ et $-8 < 0$ donc $S = \emptyset$

3.3 L'expression conjuguée : On sait que

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

et $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ Il en résulte :

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \text{ et } a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$$

Par suite : $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+})$

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x + y}{(\sqrt[3]{x})^2 - \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y} + (\sqrt[3]{y})^2}$$

4) Puissance rationnelle :

4.1 Puissance entier :

Rappelle : Soit x un réel et n un entier naturel non nul on a

$$: x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}} \text{ et } (x \neq 0) \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

4.2 Puissance rationnelle

Propriété : Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier non nul

$$q \text{ on pose : } \sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$$

Définition : Soit x un réel positif et r un rationnel ($r \in \mathbb{Q}$) ;

$$r = \frac{p}{q} \text{ où } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^* \text{ on pose :}$$

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{x})^p$$

Propriétés : Soit x et y deux réels positifs, r et r' des rationnels on a :

1.	$x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
2.	$x^{r \times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
3.	$x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
4.	$x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
5.	$(xy)^r = x^r y^r$
6.	$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe. C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

