

# FONCTIONS - Généralités

## 1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions

### 1-1) Définition :

Une **fonction** est un procédé qui à un nombre  $x$  appartenant à un ensemble  $D$  associe un nombre  $y$ .

On note :  $f : x \mapsto y$  ou encore  $y = f(x)$

- On dit que  $y$  est l'image de  $x$  par la fonction  $f$
- On dit aussi que  $x$  est un antécédent de  $y$  par la fonction  $f$

**1-3) Domaine de définitions :** Pour une fonction  $f$  donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction  $f$  que l'on notera  $D_f$

## 2) Fonctions paires et Fonctions impaires

**2.1. Fonction paire :** On dit qu'une fonction  $f$  est paire si et seulement si : a) Pour tout réel  $x$ , si  $x \in D_f$  alors  $-x \in D_f$   
b) Pour tout réel  $x$  de  $D_f$ , on a :  $f(-x) = f(x)$

**2.3. Fonction impaire :** On dit qu'une fonction  $f$  est impaire si et seulement si :

- a) Pour tout réel  $x$ , si  $x \in D_f$ , alors  $-x \in D_f$   
b) Pour tout réel  $x$  de  $D_f$ , on a :  $f(-x) = -f(x)$

### 2.4 le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

## 3) Les variations d'une fonction numérique

### 3-1) Sens de variation d'une fonction : fonction croissante -décroissante -fonction constantes

Soit  $f$  une fonction et  $D_f$  son domaine de définition et soit  $I$  un intervalle inclus dans  $D_f$

- Dire  $f$  que est strictement croissante sur  $I$  ( croissante sur  $I$  ) signifie que : Si  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  tq  $x_1 < x_2$  alors  $f(x_1) < f(x_2)$  ( $f(x_1) \leq f(x_2)$ )

*Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».*

- Dire  $f$  que est strictement décroissante sur  $I$  ( décroissante sur  $I$  ) signifie que :  
Si  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  tq  $x_1 < x_2$  alors  $f(x_1) > f(x_2)$   
( $f(x_1) \geq f(x_2)$ )

*Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».*

- Dire  $f$  que est constante sur  $I$  signifie que :

Si  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  tq  $x_1 < x_2$   
alors  $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle  $I$  est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur  $I$  soit décroissante sur  $I$

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$ . On dit que  $f$  est constante sur  $I$  ssi il existe un réel  $k$  tq :  $f(x) = k$  pour tout  $x \in I$

### 3-2) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$

- On dit que  $f$  est strictement croissante(croissante) sur  $I$  ssi pour tout  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  et  $x_1 \neq x_2$  on a

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad \left( \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \right)$$

- On dit que  $f$  est strictement décroissante(décroissante) sur  $I$  ssi pour tout  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  et  $x_1 \neq x_2$  on a

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \quad \left( \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0 \right)$$

- On dit que  $f$  est constante sur  $I$  ssi pour tout  $x_1 \in I$  et  $x_2 \in I$  et  $x_1 \neq x_2$  on a  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$

### 3-3) les variations et la parité :

Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}^+$  et soit  $I'$  le symétrique de l'intervalle  $I$   
Si  $f$  est paire alors :

- $f$  est croissante sur  $I$  ssi  $f$  est décroissante sur  $I'$
  - $f$  est décroissante sur  $I$  ssi  $f$  est croissante sur  $I'$
- Si  $f$  est impaire alors :
- $f$  est croissante sur  $I$  ssi  $f$  est croissante sur  $I'$
  - $f$  est décroissante sur  $I$  ssi  $f$  est décroissante sur  $I'$

### Conséquences :

Si  $f$  est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur  $D_f \cap \mathbb{R}^+$  et en déduire ses variations sur  $D_f$

## 4) Les variations des deux fonctions : $\alpha f$ et $f + \alpha$

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle  $I$  et  $\alpha \in \mathbb{R}^*$

- Si  $\alpha \in \mathbb{R}^{**}$  alors les fonctions  $f$  et  $\alpha f$  ont les mêmes variations sur  $I$
- Si  $\alpha \in \mathbb{R}^{-}$  alors les fonctions  $f$  et  $\alpha f$  ont des variations opposées sur  $I$
- $f$  et  $f + \alpha$  ont les mêmes variations sur  $I$

## 5) comparaison deux fonctions (fonctions positives et négatives) et Fonctions majorées ; minorées et bornée

### 6-1) Comparaison de fonctions

**Définition 1 :** On dit que deux fonction  $f$  et  $g$  sont égales si et seulement

si : Elles ont même ensemble de définition :  $D_f = D_g = \mathbb{R}$

et Pour tout  $x \in D_f$  :  $f(x) = g(x)$  et On écrit :  $f = g$

**6-2) Définitions :** Soit  $I$  un intervalle et soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies Sur  $I$ . On dit que :

1)  $f$  est inférieure à  $g$  sur  $I$  lorsque :  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in I$ . On note :  $f \leq g$  Sur  $I$ .

2)  $f$  est positive sur  $I$  lorsque :  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .

On note :  $f \geq 0$  sur  $I$ .

3)  $f$  est **majorée** sur  $I$  lorsqu'il existe un réel  $M$  tel que :  $f(x) \leq M$  pour tout  $x \in I$

4)  $f$  est **minorée** sur  $I$  lorsqu'il existe un réel  $m$  tel que :  $m \leq f(x)$  pour tout  $x \in I$

5)  $f$  est **bornée** sur  $I$  lorsqu'il existe des réels  $M$  et  $m$  tels que :  $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in I$ .

( $f$  est majorée et minorée)

### Interprétation graphique :

1)  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in I$  ssi La courbe ( $C_g$ ) de la fonction  $g$  est au-dessus de La courbe ( $C_f$ ) de  $f$  sur l'intervalle  $I$

2)  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$  ssi La courbe ( $C_f$ ) de la fonction  $f$  est au-dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle  $I$

## 6) Les extremums d'une fonction numérique

**7-1)) Définitions :** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert  $I$  et soit  $a \in I$

➤ Dire que  $f(a)$  est une valeur maximale de  $f$  sur  $I$  (ou  $f(a)$  est un maximum de  $f$  sur  $I$ ) ssi pour tout que  $\forall x \in I : f(x) \leq f(a)$

➤ Dire que  $f(a)$  est une valeur minimale de  $f$  sur  $I$  (ou  $f(a)$  est un minimum de  $f$  sur  $I$ ) ssi pour tout  $\forall x \in I : f(x) \geq f(a)$

## 7) Etude et représentation graphique des fonctions

$$x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$$

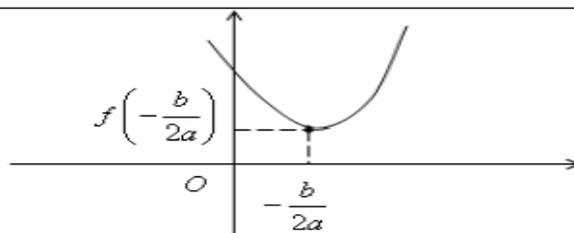
**7-1)Résumé :**  $f(x) = ax^2 + bx + c$  et  $a \neq 0$

1° Dans le repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe ( $C_f$ ) c'est une parabole de sommet  $W(\alpha; \beta)$  et d'axe de symétrie la droite  $x = \alpha$

## 2° Les variations de $f$

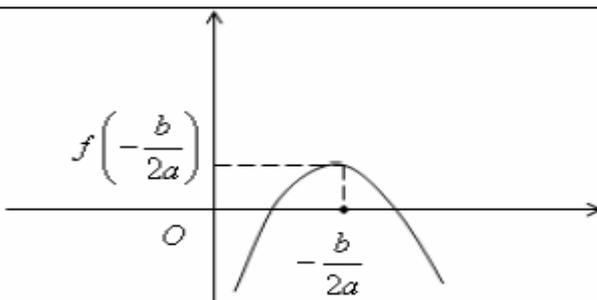
Si  $a > 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			



Si  $a < 0$

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$			



## 7-2) Exemple :

1° Soit  $f$  une fonction numérique

$$tq : f(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

on a  $f$  est une fonction polynôme donc  $D_f = \mathbb{R}$

On a  $a = 2$  et  $b = -4$  et  $c = -2$  ( $f(x) = ax^2 + bx + c$ )

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \times 2} = 1 \text{ et } (f(1) = 2 - 4 - 2 = -4)$$

Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$  on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 2(x-1)^2 - 4$$

Soit  $W(1; -4)$  Donc dans le repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  1

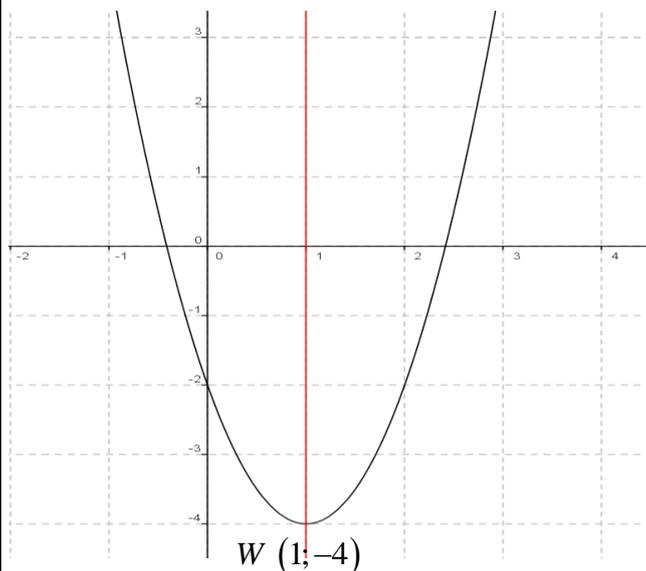
a courbe ( $C_f$ ) c'est une parabole de sommet  $W(1; -4)$

et d'axe de symétrie la droite  $x = 1$

Tableau de variations de  $f$

On a  $a = 2 > 0$  donc :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↗



**8) Etude et représentation graphique des fonctions**

**homographique :**  $x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$   $a \neq 0$  et  $c \neq 0$

**8-1) Résumé et propriété :** 1) Soit  $f$  une fonction tq :

$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  on a  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $cx+d \neq 0$  ssi

$x \neq -\frac{d}{c}$  donc :  $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$   $(C_f)$  est l'hyperbole de centre

$W\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$  et d'asymptotes les droites d'équations

respectives  $x = -\frac{d}{c}$  et  $y = \frac{a}{c}$

**1<sup>ier</sup> cas :** si  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$

Tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	↗		↗

**2<sup>ier</sup> cas :** si  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$

Tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↘

**8-2) Exemples :**

**Exemple 1:** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

on a  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x-1 \neq 0$  ssi  $x \neq 1$

Donc  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$   $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 < 0$

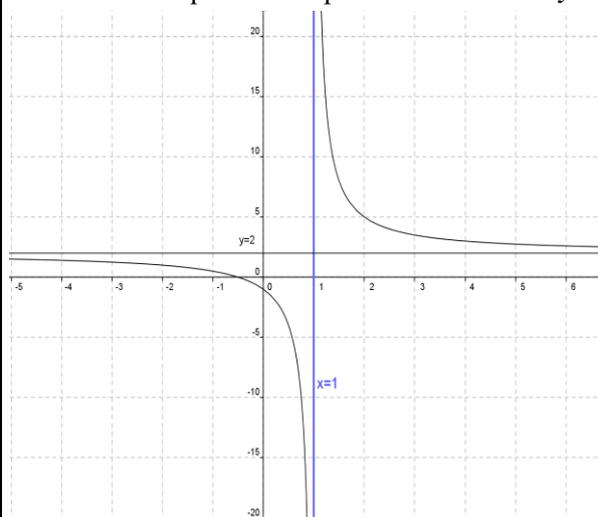
• Donc le tableau de variations de  $x \rightarrow \frac{2x+1}{x-1}$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↘

• Représentation graphique

-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3

$(C_f)$  est l'hyperbole de centre  $W(1; 2)$  et d'asymptotes les droites d'équations respectives  $x = 1$  et  $y = 2$



**9) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme:  $x \xrightarrow{f} ax^3$**

**Exemple :** Soit  $f$  une fonction numérique définie par :

$f(x) = \frac{1}{4}x^3$

1) Déterminer  $D_f$

2) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation

3) tracer la dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_f)$  de  $f$

**Solutions :** 1)  $D_f = x \in \mathbb{R}$

2) soient  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tq  $x_1 < x_2$

Donc :  $x_1^3 < x_2^3$  Donc :  $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$

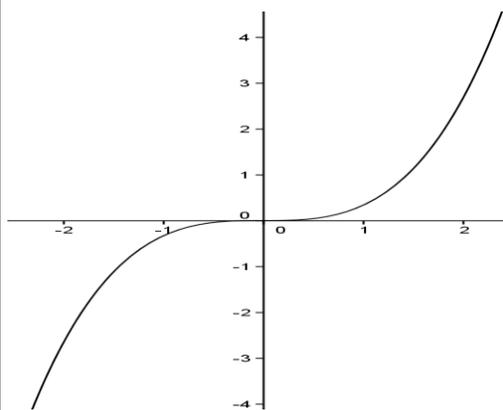
Donc :  $f(x_1) < f(x_2)$

Donc  $f$  est strictement croissante

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



### 10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} \sqrt{a+x}$

**Exemple :** Soit  $f$  une fonction numérique définie par :  $f(x) = \sqrt{x+2}$

1) Déterminer  $D_f$

2) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation

3) tracer la dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_f)$  de  $f$

**Solutions :** 1)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x + 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2, +\infty[$$

2) soient  $x_1 \in [-2; +\infty[$  et  $x_2 \in [-2; +\infty[$  tq  $x_1 < x_2$

Donc :  $x_1 + 2 < x_2 + 2$  Donc :  $\sqrt{x_1 + 2} < \sqrt{x_2 + 2}$

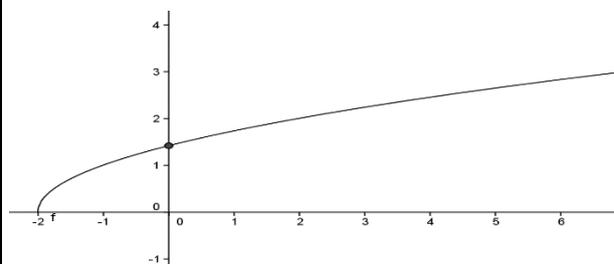
Donc :  $f(x_1) < f(x_2)$

Donc  $f$  est strictement croissante

Tableau de variation :

$x$	$-2$	$+\infty$
$f(x)$	$0$	$+\infty$

$x$	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



### 11) Fonction Partie entière

**12-1) Définition :** Soit  $x$  un nombre réel

La partie entière de  $x$  est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à  $x$ .

Notation : La partie entière de  $x$  est maintenant notée :

$E(x)$  ou  $[x]$

**Exemples :**  $E(4,2) = 4$  ;  $E(-3,75) = -4$  ;

**12-2) Propriétés :** 1)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) \leq x < E(x) + 1$

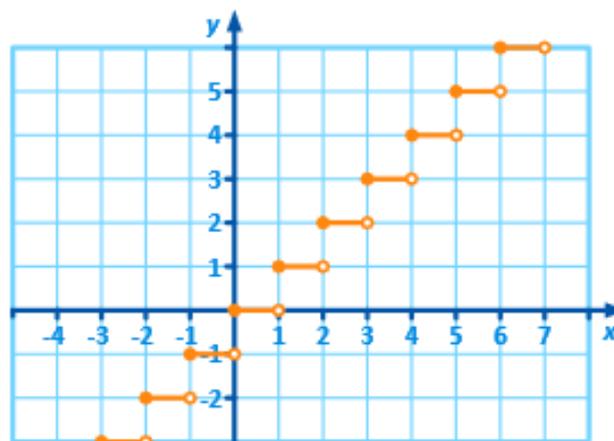
2)  $\forall x \in \mathbb{Z} \quad E(x) = x$

Un nombre  $x$  est entier si et seulement si il est égal à sa partie entière

2)  $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad E(x+n) = n + E(x)$

**12-3) représentation graphique de la fonction  $x \rightarrow E(x)$  :**

$\forall k \in \mathbb{Z}$  Si  $k \leq x < k+1$  alors  $E(x) = k$  donc Voici la courbe représentative de la fonction partie entière :



## 12) La composée de deux fonctions

**12-1) Définition :** Soit la fonction définie sur l'ensemble I et g la fonction définie sur l'ensemble J tel que :

$$\forall x \in I \quad f(x) \in J$$

La composée des deux fonctions f et g est la fonction noté :

$$g \circ f \text{ définie sur I par : } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in I$$

On peut alors faire le schéma suivant :

$$x \rightarrow f(x) = y \rightarrow g(f(x)) = z$$

**Remarque :** 1) La composée de deux fonctions n'est pas commutative

$$\text{c.-à-d. } g \circ f \neq f \circ g$$

2) Soit  $D_f$  et  $D_g$  les ensembles de définition des fonctions f

$$\text{et g. } D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

## 12-2) Variations d'une fonction composée

**Théorème :** Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur f(I).

$\Leftrightarrow$  Si f et g ont même variation respectivement sur I et f(I) alors la fonction  $g \circ f$  est croissante sur I.

$\Leftrightarrow$  Si f et g ont des variations opposées respectivement sur I et f(I) alors la fonction  $g \circ f$  est décroissante sur I.

## 13) Fonctions périodiques :

**Définition :** On considère une fonction réelle f dont on note D l'ensemble de définition.

On dit que f est périodique de période T si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a)  $\forall x \in D$  on a  $x+T \in D$

b)  $\forall x \in D$  on a  $f(x+T) = f(x)$

et la période de f c'est le plus petit réel strictement positif qui vérifie les conditions

**Exemple de fonctions périodiques :**

1. Une fonction constante sur  $\mathbb{R}$  est périodique ; tout réel non nul en est une période.

2. La fonction  $x \rightarrow E(x)$  est périodique, 1 est une période ainsi que tout entier non nul.

3. les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période  $T = 2\pi$

4. la fonction tangente est périodique de période  $T = \pi$

5. La période des fonctions:  $f : x \rightarrow \cos(ax)$  et

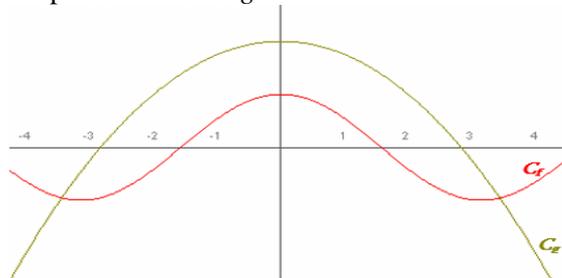
$$f : x \rightarrow \sin(ax) \quad a \neq 0 \text{ est } T = \frac{2\pi}{a}$$

**Remarque :** La périodicité permet de réduire l'étude des variations d'une fonction à un intervalle de longueur égale à la période. Donc pour tracer la représentation graphique d'une fonction T-périodique, il suffit donc de construire la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire.

## 14) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

### 1) Position relative de deux courbes et intersection

Soient  $(C_f)$  la courbe représentative de f et  $(C_g)$  la courbe représentative de g.



On a les relations suivantes :

$$M(x; y) \in (C_f) \text{ ssi } y = f(x)$$

$$M(x; y) \in (C_g) \text{ ssi } y = g(x)$$

Aux points d'intersection de  $(C_f)$  et de  $(C_g)$ , on a

$$M \in (C_f) \text{ et } M \in (C_g) \text{ donc}$$

$$\text{soit } f(x) = g(x)$$

**A retenir :**

- les solutions de l'équation  $f(x) = g(x)$  sont les abscisses des points d'intersection de  $(C_f)$  et de  $(C_g)$
- les solutions de l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$  sont les abscisses des points de  $(C_f)$  situés au-dessus de  $(C_g)$ .
- les solutions de l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$  sont les abscisses des points de  $(C_f)$  situés au-dessous de  $(C_g)$

**Un cas particulier :**

équation  $f(x) = m$  et inéquation  $f(x) \geq m$

- Les solutions de l'équation  $f(x) = m$  sont les abscisses des points d'intersection de  $(C_f)$  avec la droite d'équation  $y = m$
- Les solutions de l'inéquation  $f(x) \geq m$  sont les abscisses des points de  $(C_f)$  situés au-dessus de la droite d'équation  $y = m$ .

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »*

*Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices*

*Que l'on devient un mathématicien*

**Prof : Atmani najib**



