Résumé de Cours BARYCENTRE **PROF : ATMANI NAJIB** **1BAC math**

http:// xriadiat.e-monsite.com

BARYCENTRE

Le plan (P) et rapporté à un repère $R\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) Barycentre de deux points pondérés.

1-1) Soit A un point et α un réel non nul ; le couple (A, α) s'appelle un point pondéré.
Plusieurs points pondérés constituent un système pondéré

1-2) Barycentre de deux points pondérés.

a) Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré tel que $\alpha + \beta \neq 0$; le barycentre du système pondéré Σ est le point G qui vérifie : $\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}$

On écrit : $G = Bar\ \{(A, \alpha)\ ; (B, \beta)\}$

1-3) Propriétés de barycentre

a) Le barycentre d'un système pondéré de deux points ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul

b) Si $\alpha = \beta$ le barycentre du système pondéré $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'appelle l'isobarycentre de A et B qui n'est que le milieu du segment $[AB]$.

c)Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ un système pondéré, tel que : $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$.Pour tout point M du plan (P) on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{MB}$

ou $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ Cette propriété s'appelle la propriété caractéristique du barycentre et on a : $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

d)Si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ alors les points A, B et G sont alignés.

e)Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a : $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$

et donc on a les coordonnées de G : $\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{a+b} \end{cases}$

2) Barycentre de trois points pondérés

2-1) Soit Σ :$\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$
Il existe un et un seul point G qui vérifie
$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ Et s'appelle le barycentre du système pondéré Σ

2-2) Soit $\Sigma = \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$
si M est un point quelconque dans le plan (P)

on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{MC}$

donc : $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}=\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$

2-3) Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ des points du plan et $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

on a : $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{OC}$

et donc les coordonnées de G :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

2-4) Propriétés :

a)Le barycentre d'un système pondéré de trois points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre non nul : pour $k \neq 0$
$Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma) = Bar\{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$

b) La propriété d'associativité :
Si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$ avec $\alpha + \beta \neq 0$
et $G' = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
Alors : $G = Bar\ \{(G', (\alpha + \beta)); (C, \gamma)\}$
Remarque : La propriété d'associativité nous permet de construire le barycentre de trois points pondérés.

c)Cas particulier : Si les poids α ; β et γ sont égaux le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \alpha); (C, \alpha)\}$
S'appelle **le centre de gravité** du triangle ABC.

d) Barycentre de quatre points pondérés

Soit Σ =$\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$ un système pondéré, tel que $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$ .Il existe un et un seul point G qui vérifie : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Et si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$
Et M est un point quelconque dans le plan (P)

Alors on a : $\overrightarrow{MG}=\frac{\alpha}{s}\overrightarrow{MA}+\frac{\beta}{s}\overrightarrow{MB}+\frac{\gamma}{s}\overrightarrow{MC}+\frac{\delta}{s}\overrightarrow{MD}$

où $s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

e) Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ et $C(x_C;y_C)$ et $D(x_D;y_D)$ des points du plan
Et si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$
Alors : les coordonnées de G sont :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{s} \\ y_G = \dfrac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{s} \end{cases}$$

où $s=\alpha+\beta+\gamma+\delta$

f) Le barycentre d'un système pondéré de quatre points ne varie pas si on multiplie les poids par le même nombre

g) Si $G = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$
Avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\gamma + \delta \neq 0$ Si $G' = Bar\ \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$
Et $G'' = Bar\ \{(C, \gamma); (D, \delta)\}$
Alors $G = Bar\ \{(G', (\alpha + \beta)); (G'', \gamma + \delta)\}$