

PRODUIT SCALAIRE DANS V_2 Etude analytique (1)

I) BASE ET REPERE ORTHONORMES

Soit $B(\vec{i}; \vec{j})$ une base de V_2 .

- 1) La base B est dite **orthogonale** si $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$
- 2) La base B est dite **normée** si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- 3) Une base orthogonale et normée s'appelle une base orthonormée.
- 4) Soit O un point du plan et Soit $\mathcal{R}(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan (\mathcal{P}); On dit que le repère \mathcal{R} est orthonormé si la base $B(\vec{i}; \vec{j})$ associé à \mathcal{R} est orthonormée.

II) EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE.

L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B(\vec{i}; \vec{j})$

Soient : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs de V_2

on a : 1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ 2) $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

4) Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

III) PRODUIT SCALRE ET LIGNES TRIGONOMETRIQUES.

Théorème : L'espace V_2 est rapporté à une base

orthonormée $B(\vec{i}; \vec{j})$ Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{xy' - x'y}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

IV) DISTANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE DROITE.

1) Vecteur normal sur une droite.

Soit $D(A; \vec{u})$ la droite passant par A et de vecteur

directeur \vec{u} ; tout vecteur \vec{n} non nul et orthogonal à \vec{u} s'appelle un vecteur normal sur la droite (D).

Remarque : Si \vec{n} est normal sur une droite (D); Tout Vecteur non nul colinéaire avec \vec{n} est aussi Normal sur la droite (D).

Si (D): $ax + by + c = 0$ est une droite dans le plan alors $\vec{u}(-b; a)$, et le vecteur $\vec{n}(a; b)$ normal sur la droite (D).

2) Equation d'une droite définie par un point donné et un vecteur normal.

Propriété : Soient $A(x_A; y_A)$ un point donné, et $\vec{n}(a; b)$ un vecteur non nul. La (D) la droite qui passe par A et qui

admet \vec{n} comme vecteur normal a une équation cartésienne de la forme :

$$(D): a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

Exemple : déterminer une équation cartésienne de la droite (D) qui passe par $A(0;1)$ et qui admet $\vec{n}(2;1)$ comme vecteur normal

Solution : on a (D) qui passe $A(0;1)$ et $\vec{n}(2;1)$ un vecteur normal donc : une équation cartésienne de la droite (D) est : $2(x-0) + 1(y-1) = 0$

donc : (D) : $2x + y - 1 = 0$

3) Distance d'un point par rapport à une droite.

Définition : Soient (D) une droite et M_0 un point dans le plan. La distance du point M_0 à la droite (D) est la distance M_0H où H est la projection orthogonal de M_0 sur (D). On la note : $d(M_0; (D))$

Remarque : La distance d'un point M_0 à une droite (D) est la plus petite distance de M_0 à un point M de (D)

Théorème : Soient la droite (D): $ax + by + c = 0$ et $M_0(x_0; y_0)$ un point dans le plan.

La distance du point M_0 à la droite (D) est :

$$M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

V) L'inégalité de Cauchy-Schwarz et triangulaire.

1) a) Pour tout vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

b) l'égalité est vérifiée si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

2) a) Pour tout vecteurs \vec{u} et \vec{v} on a :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|. \text{ L'inégalité triangulaire.}$$

b) l'égalité est vérifié si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens.

Propriétés : L'espace V_2 est rapporté à une base orthonormée $B(\vec{i}; \vec{j})$ Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ on a

1) L'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \leq |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \Leftrightarrow$$

$$xx' + yy' \leq |xx' + yy'| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \times \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

2) L'inégalité triangulaire.

$$: \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|. \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(x+x')^2 + (y+y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

