PROF : ATMANI NAJIB

http:// xriadiat.e-monsite.com

1BAC Science EX

# LOGIQUE ET RAISONNEMENTS

## 1. PROPOSITION :

Une proposition est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

## 2. OPERATIONS LOGIQUES :

### 2-1) L'opérateur logique «et »

La proposition « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. La proposition « P et Q » est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité

| $P \setminus Q$ | V | F |
|---|---|---|
| V | V | F |
| F | F | F |

FIGURE 1 – Table de vérité de « *P et Q* »

### 2-2) L'opérateur logique « ou »

La proposition « P ou Q » est vraie si l'une (au moins) des deux proposition s P ou Q est vraie. La proposition « P ou Q » est fausse si les deux proposition s P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

| $P \setminus Q$ | V | F |
|---|---|---|
| V | V | V |
| F | V | F |

FIGURE 2 – Table de vérité de « *P ou Q* »

### 2-3) La négation « non »

La proposition « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

On note $\overline{P}$ la négation de La proposition $P$

Table de vérité de « non P »

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

### 2-4) L'implication ⇒

La proposition « (non P) ou Q » est notée « P ⇒ Q ». Sa table de vérité est donc la suivante :

| $p$ | $q$ | $(p \Rightarrow q)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

La proposition « P ⇒ Q » se lit en français « P implique Q ». Elle se lit souvent aussi «si P est vraie alors Q est vraie » ou «si P alors Q ».

### 2-5) L'équivalence ⇔

⇔ L'équivalence est définit par :

« P ⇔ Q » est La proposition «(P ⇒ Q) et (Q ⇒ P)». On dira « P est équivalent à Q » ou « P équivaut à Q » ou « P si et seulement si Q ». Cette proposition est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité est :

| $p$ | $q$ | $(p \Leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

## 3. LOI LOGIQUE OU UNE TAUTOLOGIE :

**Définition :** On appelle une loi logique toute proposition constitué par des propositions liées entre elles par des connexions logiques est qui est toujours vraie quel que soit la valeur de vérité des propositions qui la constituent.

Une loi logique s'appelle aussi une tautologie.

**Proposition 1 :** Soient P, Q, R trois proposition s. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1) P ⇔ non(non(P))
2. (P et Q) ⇔ (Q et P)
3. (P ou Q) ⇔ (Q ou P)
4. non(P et Q) ⇔ (non P) ou (non Q)
5. non(P ou Q) ⇔ (non P) et (non Q)
6.P et (Q ou R) ⇔ (P et Q) ou (P et R)
7.P ou (Q et R) ⇔ (P ou Q) et (P ou R)
8. « P ⇒ Q » ⇔ «non(Q) ⇒ non(P)»

## 4. Quantificateurs et fonction propositionnelle

Si une proposition P dépend d'un paramètre x on l'appelle <u>fonction propositionnelle</u>

**4.1 Définition :** Une fonction propositionnelle sur un ensemble $E$ est une expression contenant une ou plusieurs variables Libres dans $E$ et qui est susceptible de devenir une proposition vraie ou fausse si l'on attribue à ces variables certaines valeurs particulières de l'ensemble $E$

**4.2 Le Quantificateurs ∀: «pour tout» :**

On lit « Pour tout x appartenant à E, P(x) »

Sous-entendu :

« Pour tout x appartenant à E ; P(x) est vraie ».

**Exemples :**

« $\forall x \in [1;+\infty[ : x^2 \geq 1$)» est une proposition vraie.

**4.3 Le Quantificateurs ∃: «il existe»**

La proposition $\exists x \in E / P(x)$ est une proposition vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel P(x) est vraie. On lit «il existe x appartenant à E tel que P(x) (soit vraie)».

**Exemples :**

2)« $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 - n \geq n$ )»est vraie (il y a plein de choix, par exemple n=3 convient, mais aussi n=10 ou même n=100, un seul suffit pour dire que La proposition est vraie)

3) « $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1$)» est fausse (aucun réel au carré ne donnera un nombre négatif)

**4.4 La négation des Quantificateurs :**

La négation de « $\forall x \in E : P(x)$ )»est « $\exists x \in E : \overline{P(x)}$ ».

La négation de « $\exists x \in E : P(x)$ )»est « $\forall x \in E : \overline{P(x)}$ ».

**Remarques**

1)L'ordre des Quantificateurs est très important.

2)Quand on écrit « $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$ )»cela signifie juste qu'il existe au moins un réel pour lequel f s'annule. Rien ne dit que ce x est unique. A fin de préciser que f s'annule en une unique valeur, on rajoute un point d'exclamation : $\exists! x\in\mathbb{R} : f(x)=0$

2)Pour la négation d'une phrase logique, il n'est pas nécessaire de savoir si la phrase est fausse ou vraie. Le procédé est algorithmique : on change le « pour tout » en «il existe » et inversement,

## 5. RAISONNEMENTS

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

**5.1. <u>Raisonnement direct</u>** : On veut montrer que La proposition « P ⇒ Q » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie

**Exemple1 :** $x\in\mathbb{R}; y\in\mathbb{R}$

Montrer que : $\begin{cases}0\le x\prec 2\\ 0\le y\prec 2\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ 1$

**Solution :** $\begin{cases}0\le x\prec 2\\ 0\le y\prec 2\end{cases}\Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{x}\succ\frac{1}{2}\\ \frac{1}{y}\succ\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\succ 1$

**5.2. <u>Raisonnement par disjonction des cas :</u>**

Si l'on souhaite verifier une proposition P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre La proposition pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de disjonction des cas ou méthode cas par cas.Donc : Si on montre que les deux proposition $\overline{P}\Rightarrow Q$ et $P\Rightarrow Q$ sont vraies (et puisque la dernière proposition est une loi logique) on peut conclure que $Q$ est vraie.

**Exemple1 :** Montrer que pour tout $\forall x\in\mathbb{R} : |x-1|\le x^2-x+1$.

**Solution :** Soit $x\in\mathbb{R}$. Nous distinguons deux cas.

Premier cas : x >1 Alors|x−1|= x−1.

Calculons alors $(x^2-x+1)-(x-1)=x^2-x+1-x+1$

$(x^2-x+1)-(x-1)=x^2-2x+1+1=(x-1)^2+1\ge 0$ Ainsi $x^2-x+1\ge|x-1|$

Deuxième cas : x < 1. Alors|x−1|=−(x−1).

Nous obtenons $(x^2-x+1)+(x-1)=x^2-x+1+x-1=x^2\ge 0$.

Et donc $x^2-x+1\ge|x-1|$

Conclusion : Dans tous les cas $x^2-x+1\ge|x-1|$.

**Exemple 2** :Montrer que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3 pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**Solution :** soit $n\in\mathbb{N}$on a 3 cas possibles seulement pour n $n=3k$ ou $n=3k+1$ ou $n=3k+2$ avec $k\in\mathbb{N}$

<u>1cas :</u> $n=3k$

$n(n+1)(n+2)=3k(3k+1)(3k+2)=3k'$ Avec $k'=k(3k+1)(3k+2)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>2cas :</u> $n=3k+1$

$n(n+1)(n+2)=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$

$n(n+1)(n+2)=3(3k+1)(3k+2)(k+1)=3k'$

Avec $k'=(3k+1)(3k+2)(k+1)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

<u>3cas :</u> $n=3k+2$

$n(n+1)(n+2)=(3k+2)(3k+3)(3k+4)$

$n(n+1)(n+2)=3(3k+2)(k+1)(3k+4)=3k'$

Avec $k'=(3k+2)(k+1)(3k+4)$

Donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$ $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

**5.3. <u>Raisonnement par contraposition :</u>**

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

La proposition « P ⇒ Q » est équivalente à :

« non(Q) ⇒ non(P) ».

Donc si l'on souhaite montrer La proposition « P ⇒ Q »

On montre en fait que non(Q) ⇒ non(P) est vraie.

**Exemple** : $x\in\mathbb{R}$ et $x\neq -5$

Montrer que : $x\neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5}\neq 2$

**Solution :** soit $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Utilisons un Raisonnement par contraposition :

Montrons que : : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow \quad x=-8$

On a : $\frac{x+2}{x+5}=2\Rightarrow \; x+2=2(x+5)$

$\Rightarrow x+2=2x+10\Rightarrow x=-8$

Donc : $x\neq -8 \Rightarrow \frac{x+2}{x+5}\neq 2$

**5.4. <u>Raisonnement par l'absurde :</u>**

Le raisonnement par l'absurde repose sur le principe suivant : pour montrer « P ⇒ Q » on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « P ⇒ Q » est vraie.

**Exemple :** Soient $a\succ 0$ et $b\succ 0$ Montrer que si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

**Solution :** Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ et $a\neq b$.

Comme $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors $a(1+a)=b(1+b)$donc $a+a^2=b+b^2$ d'où $a^2-b^2=b-a$. Cela conduit à $(a-b)(a+b)=-(a-b)$Comme $a\neq b$alors $a-b\neq 0$et donc en divisant par a−b on obtient :

a+ b =−1. La somme des deux nombres positifs a et b ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.

Conclusion : si $\frac{a}{1+b}=\frac{b}{1+a}$ alors a = b.

**5.5. <u>Raisonnement par Contre-exemple :</u>**

Si l'on veut montrer qu'une proposition du type $\forall x \in E : P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que P(x) est vraie. Par contre pour montrer que cette proposition est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que P(x) soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à La proposition $\forall x \in E : P(x)$

**Exemple :** Montrer que La proposition $P : (\forall x \in [0;1]) : x^2 \geq x$ est fausse :

**Solution :** sa négation est : $\overline{P} : (\exists\, x \in [0;1]) : x^2 \prec x$

On posant : $x=\frac{1}{2}$ on aura : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \prec \frac{1}{2}$ donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc $P$ est fausse

**5.6. <u>Raisonnement par équivalence :</u>**

Le raisonnement par équivalence repose sur le principe suivant : pour montrer que P est vraie on montre que « P $\Leftrightarrow$ Q » est vraie et Q est vraie donc on déduit que P est vraie.

**Exemple :** $\forall x > 0 \quad x+\frac{1}{x} \geq 2$

**Solution :** $x+\frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}-2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+1-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

et puisque on a : $\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ donc $\forall x > 0 \quad x+\frac{1}{x} \geq 2$

**5.7. <u>Raisonnement par récurrence :</u>**

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une proposition P(n), dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes :

1étapes : l'initialisation on prouve P (0) est vraie

2étapes : d'hérédité : on suppose n > 0 donné avec P(n) vraie

3étapes : on démontre alors que La proposition P(n+1) au rang suivant est vraie

Enfin dans la conclusion : P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

**Exemple :** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}; n^3+2n$ est divisible par 3

**Solution :** montrons $\exists k \in \mathbb{N} / n^3+2n=3k$

1étapes : l'initialisation :Pour n=0 nous avons $0^3+2\times 0=0$ est un multiple de3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / n^3+2n=3k$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que :

$\exists k' \in \mathbb{N} / (n+1)^3+2(n+1)=3k'$ ??

$(n+1)^3+2(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+2n+2=$

$=(n^3+2n)+3n^2+3n+3=3k+3(n^2+n+1)=3(k+n^2+n+1)$

$=3(k+n^2+n+1)=3k'$ avec $k'=k+n^2+n+1$

Donc P(n+1) est vraie.

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :

$\forall n \in \mathbb{N}; n^3+2n$ est divisible par 3

Pour expliquer ce principe assez intuitivement, prenons l'exemple suivant :

La file de dominos : Si l'on pousse le premier domino de la file (Initialisation).

Et si les dominos sont posés l'un après l'autre d'une manière `a ce que la chute d'un domino entraine la chute De son suivant (hérédité).

Alors : Tous les dominos de la file tombent. (La conclusion)

*« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.*

*C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices*

*Que l'on devient un mathématicien*