

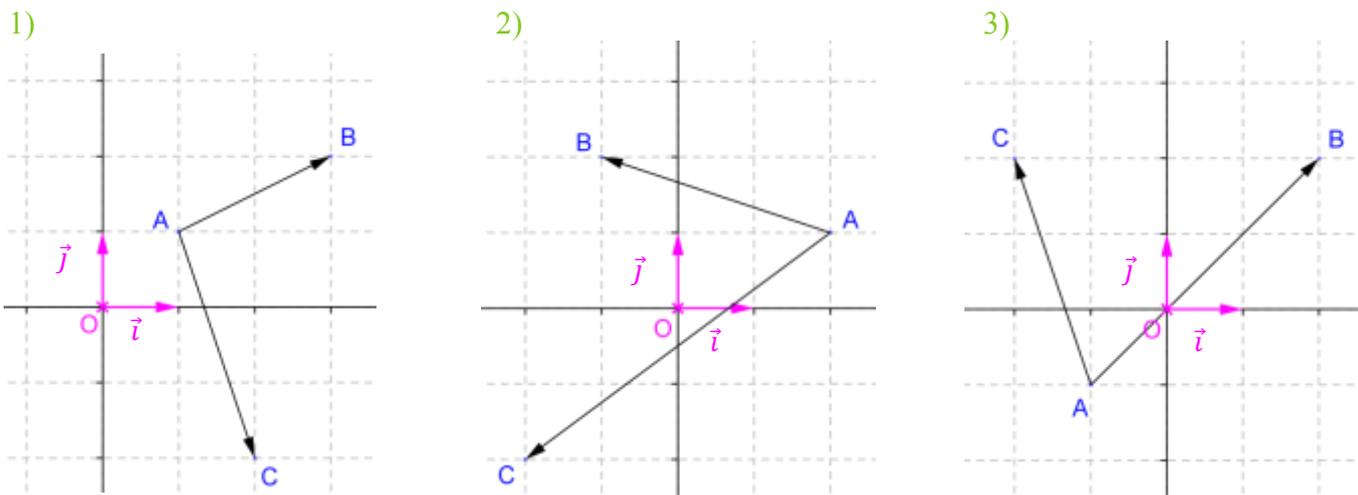
# produit scalaire:Exercices corrigés

Sont abordés dans cette fiche :

- **Exercice 1** : produit scalaire en fonction des coordonnées de vecteurs dans un repère orthonormé
- **Exercice 2** : propriétés du produit scalaire (règles de calcul et identités remarquables)
- **Exercice 3** : produit scalaire en fonction des normes de vecteurs
- **Exercices 4 et 5** : orthogonalité de deux vecteurs et produit scalaire nul
- **Exercice 6** : formule de la médiane
- **Exercice 7** : produit scalaire de vecteurs colinéaires
- **Exercices 8 et 9** : produit scalaire de vecteurs quelconques à l'aide d'une projection orthogonale
- **Exercices 10, 11, 12 et 14** : produit scalaire en fonction des normes de vecteurs et d'un angle orienté
- **Exercice 13** : quadrangle orthocentrique
- **Exercice 15** : équation cartésienne de la médiatrice d'un segment
- **Exercice 16** : équation de cercle
- **Exercices 17 et 19** : équation de tangente à un cercle
- **Exercice 18** : théorème d'Al-Kashi et somme des carrés des côtés d'un parallélogramme
- **Exercice 20** : droite d'Euler
- **Exercice 21** : recherche d'un minimum
- **Exercice 22** : algorithme de perpendicularité de deux droites dans un repère orthonormé du plan

## Exercice 1

Soit un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$  du plan. Dans chacun des trois cas suivants, calculer  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .



**Correction de l'exercice 1****Rappel : Produit scalaire dans un repère orthonormé du plan**

Dans un repère orthonormé du plan, si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ont pour coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ , alors le produit scalaire (euclidien) du vecteur  $\vec{u}$  par le vecteur  $\vec{v}$ , noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , est donné par la relation :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

**Remarque :** Cette expression ne doit pas être confondue avec la condition de colinéarité  $xy' - x'y$ .

Il convient tout d'abord de remarquer que le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  est orthonormé. En effet, les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont d'une part unitaires (puisque  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ ) et d'autre part orthogonaux (puisque  $\vec{i} \perp \vec{j}$ ).

1) Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ont pour coordonnées respectives  $(1; 1)$ ,  $(3; 2)$  et  $(2; -2)$ .

Par conséquent, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Quant au vecteur  $\overrightarrow{AC}$ , il a pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ -2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Il en résulte que :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 1 + 1 \times (-3) = 2 - 3 = -1$

2) Graphiquement,  $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + 1\vec{j}$ . Par conséquent, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

De même,  $\overrightarrow{AC} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$ . Par conséquent, le vecteur  $\overrightarrow{AC}$  a pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

De ce fait,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times (-4) + 1 \times (-3) = 12 - 3 = 9$ .

3) Graphiquement,  $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$ . Par conséquent, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

De même,  $\overrightarrow{AC} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ . Par conséquent, le vecteur  $\overrightarrow{AC}$  a pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

De ce fait,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-1) + 3 \times 3 = -3 + 9 = 6$ .

**Exercice 2**

Soient  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  deux vecteurs du plan tels que  $\vec{i}^2 = 2$ ,  $\|\vec{j}\| = 3$  et  $\vec{i} \cdot \vec{j} = -4$ .

Calculer  $(3\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j})$ ,  $(\vec{i} - 3\vec{j})^2$ ,  $\|2\vec{i} + 3\vec{j}\|$  en détaillant les étapes de chaque calcul.

## Correction de l'exercice 2

### Rappel : Propriétés du produit scalaire (symétrie et bilinéarité)

Soient les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et soit le réel  $\lambda$ .

- **Symétrie :**  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

- **Bilinéarité :**

- ✓ Linéarité par rapport à la première variable :  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$  et  $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$

- ✓ Linéarité par rapport à la seconde variable :  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$

**Carré scalaire :**

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

1) Calculons  $(3\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j})$ .

$$(3\vec{i} - \vec{j}) \cdot (-\vec{i} + 2\vec{j}) \stackrel{\text{bilinéarité}}{=} (3\vec{i}) \cdot (-\vec{i}) + (3\vec{i}) \cdot (2\vec{j}) - \vec{j} \cdot (-\vec{i}) - \vec{j} \cdot (2\vec{j})$$

$$= \underbrace{3 \times (-1)}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ \text{1ère et 2nde variables}}} \vec{i} \cdot \vec{i} + \underbrace{3 \times 2}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ \text{1ère et 2nde variables}}} \vec{i} \cdot \vec{j} - 1 \times \underbrace{(-1)}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport} \\ \text{à la 2nde variable}}} \vec{j} \cdot \vec{i} - 1 \times \underbrace{2}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport} \\ \text{à la 2nde variable}}} \vec{j} \cdot \vec{j}$$

$$= -3 \underbrace{\vec{i}^2}_{\substack{\text{carré} \\ \text{scalaire}}} + 6 \underbrace{\vec{i} \cdot \vec{j}}_{\text{symétrie}} - 2 \underbrace{\|\vec{j}\|^2}_{\substack{\text{carré} \\ \text{scalaire}}} = -3\vec{i}^2 + 7\vec{i} \cdot \vec{j} - 2\|\vec{j}\|^2 = -3 \times 2 + 7 \times (-4) - 2 \times 3^2 = -52$$

### Rappel : Identités remarquables

Soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

2) Calculons  $(\vec{i} - 3\vec{j})^2$ .

$$(\vec{i} - 3\vec{j})^2 \stackrel{\text{identité remarquable}}{=} \vec{i}^2 + 2\vec{i} \cdot (-3\vec{j}) + (-3\vec{j})^2 = \vec{i}^2 + 2 \times \underbrace{(-3)}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport} \\ \text{à la 2nde variable}}} \vec{i} \cdot \vec{j} + \underbrace{(-3)^2}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ \text{1ère et 2nde variables}}} \vec{j}^2$$

$$= 2 - 6 \times (-4) + 9 \times 9 = 107$$

3) Calculons  $\|2\vec{i} + 3\vec{j}\|$ .

$$\|2\vec{i} + 3\vec{j}\|^2 = (2\vec{i} + 3\vec{j})^2 \stackrel{\text{identité remarquable}}{=} (2\vec{i})^2 + 2 \times (2\vec{i}) \cdot (3\vec{j}) + (3\vec{j})^2$$

$$= \underbrace{2^2 \vec{i}^2}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ \text{1ère et 2nde variables}}} + \underbrace{2 \times 2 \times 3 \vec{i} \cdot \vec{j}}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ \text{1ère et 2nde variables}}} + \underbrace{3^2 \vec{j}^2}_{\substack{\text{linéarité} \\ \text{par rapport aux} \\ \text{1ère et 2nde variables}}} = 4 \times 2 + 12 \times (-4) + 9 \times 3^2 = 41.$$

Ainsi,  $\|2\vec{i} + 3\vec{j}\| = \sqrt{41}$ .

### Exercice 3

Soit un parallélogramme  $ABCD$  tel que  $AB = 5$ ,  $AC = 6$  et  $AD = 4$ . Calculer les produits scalaires suivants :

1)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$

3)  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$

### Correction de l'exercice 3

#### Rappel : Produit scalaire et normes de vecteurs

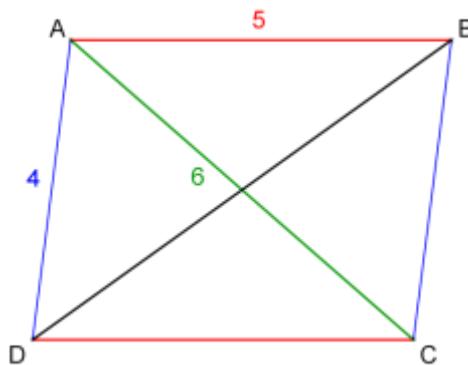
Le produit scalaire d'un vecteur  $\vec{u}$  par un vecteur  $\vec{v}$  est le nombre réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$$

Tout d'abord, analysons l'énoncé.

$ABCD$  est un parallélogramme donc les égalités vectorielles suivantes sont vérifiées :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$



1) Calculons  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ . Par définition du produit scalaire, on a :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\|^2) \stackrel{-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}}{=} \frac{1}{2} (AB^2 + BC^2 - \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\|^2)$$

$$\stackrel{\substack{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \text{relation} \\ \text{de Chasles}}}{=} \frac{1}{2} (AB^2 + AD^2 - AC^2) = \frac{1}{2} (5^2 + 4^2 - 6^2) = \frac{1}{2} (5^2 + 4^2 - 6^2) = \frac{5}{2}$$

2) Calculons désormais  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA}$ .

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{BA}\|^2 + \|\overrightarrow{CA}\|^2 - \|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}\|^2) = \frac{1}{2} (BA^2 + CA^2 - \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\|^2) = \frac{1}{2} (BA^2 + CA^2 - CB^2)$$

$$\frac{1}{2} (5 + 6 - 4) = \frac{45}{2}$$

3) Calculons enfin  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$ .

$$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{DC}\| + \|\overrightarrow{AB}\| - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\|) = \frac{1}{2} (AB^2 + AB^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}\|) = \frac{1}{2} \times 2AB^2 = AB^2 = 25$$

**Remarque :** Pour tout vecteur  $\vec{u}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ . Comme  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 = 25$

### Exercice 4

Soit un rectangle  $ABCD$  tel que  $AB = 2$  et  $AD = \sqrt{2}$ .  $I$  désigne le milieu de  $[AB]$ . Montrer que les droites  $(AC)$  et  $(ID)$  sont perpendiculaires.

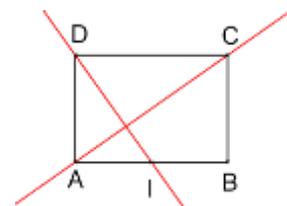
### Correction de l'exercice 4

#### Rappel : Orthogonalité et produit scalaire nul

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

Par définition du produit scalaire, on a  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ID} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{ID}\| - \|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|)$

Il convient donc de déterminer d'une part  $\|\overrightarrow{AC}\|^2$ , d'autre part  $\|\overrightarrow{ID}\|^2$  et enfin  $\|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|^2$ .



- Commençons par déterminer  $\|\overrightarrow{AC}\|^2$ .

$ABCD$  est un rectangle donc le triangle  $ABC$  est rectangle en  $B$ . Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore, on a :  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ . Or, comme  $ABCD$  est un rectangle  $BC = AD$ , d'où  $AC^2 = 2^2 + \sqrt{2}^2 = 6$ .

- Déterminons désormais  $\|\overrightarrow{ID}\|^2$ .

En outre,  $I$  est le milieu de  $[AB]$  donc, d'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle  $AID$  rectangle en  $A$ , on a :  $ID^2 = IA^2 + AD^2 = (AB/2)^2 + AD^2 = (2/2)^2 + \sqrt{2}^2 = 3$

- Enfin, déterminons  $\|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|^2$ .

En utilisant la relation de Chasles, on a :  $\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC} = \underbrace{\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{ID}} - \underbrace{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})}_{\overrightarrow{AC}} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

Or,  $ABCD$  est un rectangle donc  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ , si bien que  $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC} = \vec{0}$ .

D'où, comme  $I$  est le milieu de  $[AB]$ , c'est-à-dire comme  $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ , il vient que :

$$\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

Par conséquent,  $\|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\| = \left\| -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \right\| = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \|\overrightarrow{AB}\| = \frac{9}{4} \times 2^2 = 9$

- Finalement, en remplaçant dans l'expression initiale, on obtient :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ID} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{ID}\| - \|\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{AC}\|) = \frac{1}{2} (6 + 3 - 9) = 0$$

Comme  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{ID} = 0$ , les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{ID}$  sont orthogonaux. Autrement dit, **les droites (AC) et (ID) sont perpendiculaires.**

### Exercice 5

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ . On donne  $M(2 ; \lambda)$ ,  $A(1 ; 3)$  et  $L(4 ; 3 - \lambda)$ . Déterminer le(s) réel(s)  $\lambda$  tel que le triangle  $MAL$  est rectangle en  $A$ .

### Correction de l'exercice 5

Le triangle  $MAL$  est rectangle en  $A$  si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AL}$  sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AL} = 0$ .

Or, le vecteur  $\overrightarrow{AM}$  a pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} x_M - x_A \\ y_M - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ \lambda - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda - 3 \end{pmatrix}$ .

En outre, le vecteur  $\overrightarrow{AL}$  a pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} x_L - x_A \\ y_L - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 3 - \lambda - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -\lambda \end{pmatrix}$ .

Ainsi,  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AL} = 0 \Leftrightarrow 1 \times 3 + (\lambda - 3) \times (-\lambda) = 0 \Leftrightarrow 3 - \lambda^2 + 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 3 = 0$

Soit  $\Delta$  le discriminant du trinôme  $\lambda^2 - 3\lambda - 3$  du second degré d'inconnue  $\lambda$ .

Alors  $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 9 + 12 = 21$

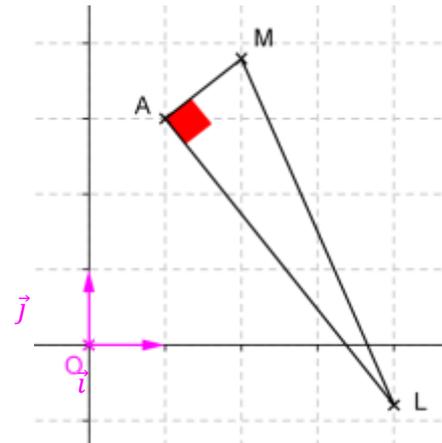
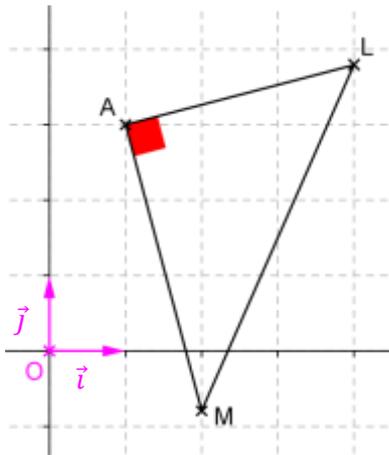
$\Delta > 0$  donc le trinôme  $\lambda^2 - 3\lambda - 3$  admet deux racines réelles distinctes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , telles que :

$$\lambda_1 = \frac{-(-3) - \sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{-3 - \sqrt{21}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{-(-3) + \sqrt{21}}{2 \times 1} = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

**Le triangle  $MAL$  est rectangle en  $A$  si et seulement si  $\lambda_1 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$  (1<sup>er</sup> cas) ou si  $\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$  (2<sup>ème</sup> cas).**

• 1<sup>er</sup> cas :  $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{21}}{2}$

• 2<sup>ème</sup> cas :  $\lambda_2 = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$



### Exercice 6

Soit un triangle  $MAB$  et soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ .

- 1) Démontrer que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ .
- 2) En appliquant cette formule à un triangle  $MAB$  rectangle en  $M$ , quelle propriété connue retrouve-t-on ?
- 3) En appliquant cette formule à un triangle  $MAB$  tel que  $MA = 4$ ,  $MB = 6$  et  $AB = 7$ , calculer la longueur de la médiane issue de  $M$ .

### Correction de l'exercice 6

1) Démontrons que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ .

D'après la relation de Chasles,  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$  et  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}$ . Par ailleurs,  $I$  est le milieu de  $[AB]$  donc

$$\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}. \text{ Ainsi, } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2.$$

Or,  $IA = AB/2$ . Donc  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ .

- 2) Appliquons cette formule à un triangle  $MAB$  rectangle en  $M$ .

Si le triangle  $MAB$  rectangle en  $M$ , alors  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ . Or, d'après ce qui précède,  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$ .

Ainsi,  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = 0 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{AB^2}{4}$ . Comme  $MI$  et  $AB$  désignent des distances, il vient que

$MI = \frac{AB}{2}$ . Ainsi, le point  $M$  appartient au cercle de centre  $I$  et de rayon  $\frac{AB}{2}$ . Mais puisque  $I$  est le milieu de  $[AB]$ ,  $M$  appartient finalement au cercle de diamètre l'hypoténuse  $[AB]$  du triangle  $MAB$  rectangle en  $M$ .

- 3) Appliquons la formule à un triangle  $MAB$  tel que  $MA = 4$ ,  $MB = 6$  et  $AB = 7$  afin de calculer la longueur de la médiane issue de  $M$ .

En notant  $I$  le milieu de  $[AB]$ ,  $(MI)$  est la médiane du triangle  $MAB$  issue de  $M$ . Ainsi, d'après ce qui précède,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\|^2) + \frac{AB^2}{4}$$

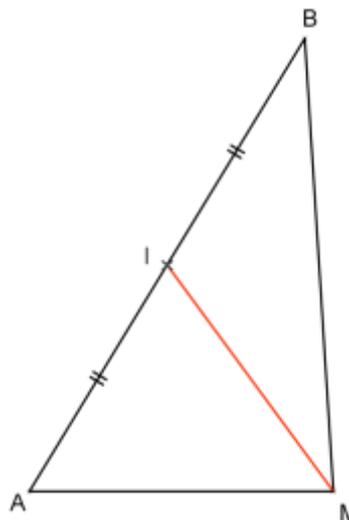
$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 - \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}\|^2) + \frac{AB^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2} (MA^2 + MB^2 - AB^2) + \frac{AB^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{2} (4^2 + 6^2 - 7^2) + \frac{7^2}{4} \Leftrightarrow MI^2 = \frac{55}{4}$$

Par conséquent,  $MI = \sqrt{\frac{55}{4}} = \frac{\sqrt{55}}{2}$ .

La médiane du triangle  $MAB$  issue de  $M$  mesure  $\frac{\sqrt{55}}{2}$ .



### Exercice 7

L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage. Calculer les produits scalaires suivants :

- 1)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 2)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$
- 3)  $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GF}$
- 4)  $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BD}$
- 5)  $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{DA}$



### Correction de l'exercice 7

#### Rappel : Produit scalaire de vecteurs colinéaires

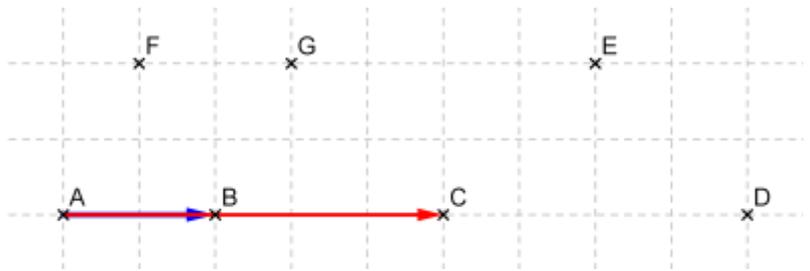
Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  colinéaires et distincts du vecteur nul.

- si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de même sens, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
- si les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont de sens contraires, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

1) Calculons  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires et de même sens donc :

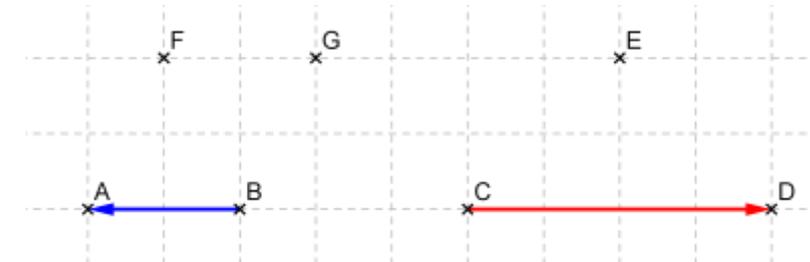
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| = 2 \times 5 = 10$$



2) Calculons  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{BA}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires et de sens contraires donc :

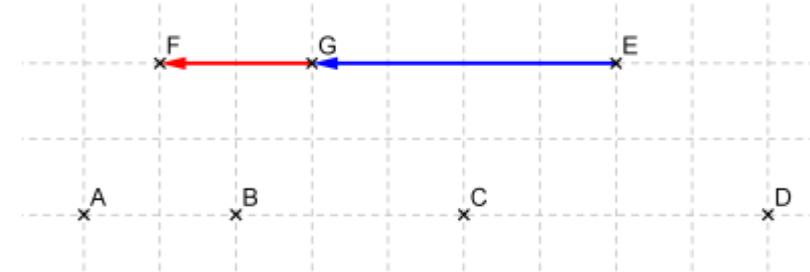
$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = -\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{CD}\| = -2 \times 4 = -8$$



3) Calculons  $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GF}$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{EG}$  et  $\overrightarrow{GF}$  sont colinéaires et de même sens donc :

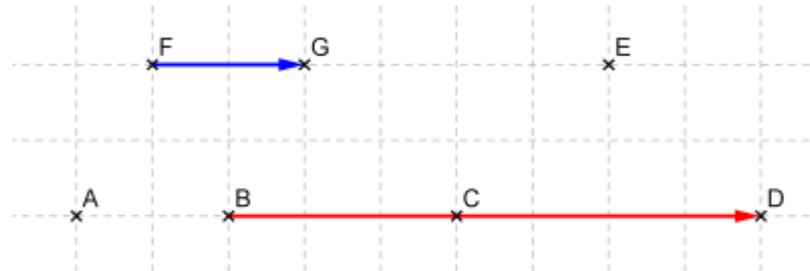
$$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GF} = \|\overrightarrow{EG}\| \times \|\overrightarrow{GF}\| = 4 \times 2 = 8$$



4) Calculons  $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{FG}$  et  $\overrightarrow{BD}$  sont colinéaires et de même sens donc :

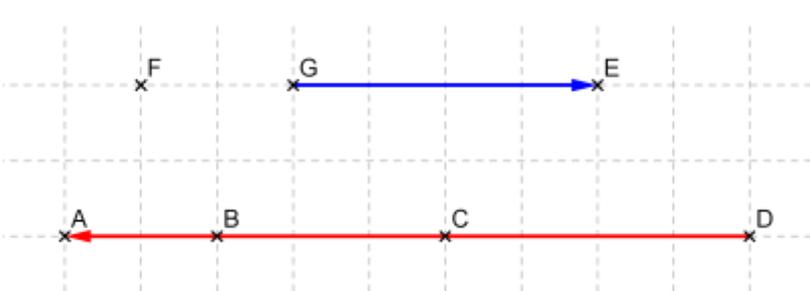
$$\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{FG}\| \times \|\overrightarrow{BD}\| = 2 \times 7 = 14$$



5) Calculons  $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{DA}$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{GE}$  et  $\overrightarrow{DA}$  sont colinéaires et de sens contraires donc :

$$\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{DA} = -\|\overrightarrow{GE}\| \times \|\overrightarrow{DA}\| = -4 \times 9 = -36$$



En résumé,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = -8$$

$$\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GF} = 8$$

$$\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{BD} = 14$$

$$\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{DA} = -36$$

### Exercice 8

Soit un carré  $ABCD$  de centre  $O$  et de côté  $a$ . Calculer, en fonction de  $a$ , les six produits scalaires suivants :

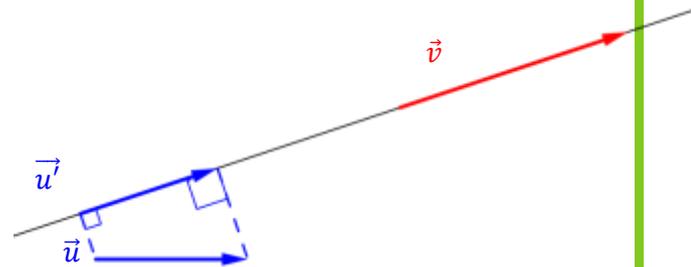
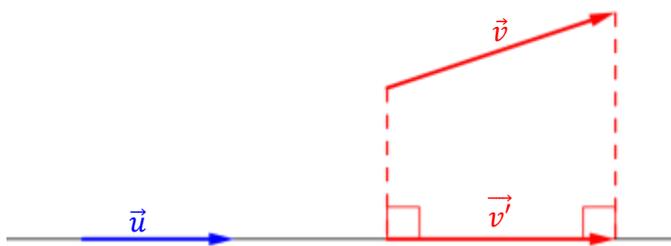
- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1) $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ | 3) $\overline{OC} \cdot \overline{OB}$ | 5) $\overline{OB} \cdot \overline{OD}$ |
| 2) $\overline{BC} \cdot \overline{BA}$ | 4) $\overline{AC} \cdot \overline{AO}$ | 6) $\overline{AD} \cdot \overline{OB}$ |

### Correction de l'exercice 8

#### Rappel : Produit scalaire et projection orthogonale de vecteurs

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non nuls. Alors, on a les relations suivantes :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}'$  où  $\vec{v}'$  est le projeté orthogonal de  $\vec{v}$  sur la droite de vecteur directeur  $\vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v}$  où  $\vec{u}'$  est le projeté orthogonal de  $\vec{u}$  sur la droite de vecteur directeur  $\vec{v}$



Par ailleurs, si les vecteurs colinéaires  $\vec{u}$  et  $\vec{v}'$  sont de même sens, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}' = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}'\|$  et s'ils sont de sens contraires,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}' = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}'\|$

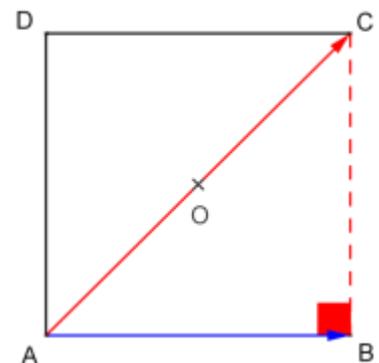
Par ailleurs, si les vecteurs colinéaires  $\vec{u}'$  et  $\vec{v}$  sont de même sens, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = \|\vec{u}'\| \times \|\vec{v}\|$  et s'ils sont de sens contraires,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}'\| \times \|\vec{v}\|$

**Remarque importante :** On peut donc aussi bien projeter  $\vec{v}$  sur la droite de vecteur directeur  $\vec{u}$  que  $\vec{v}$  sur la droite de vecteur directeur  $\vec{u}$ . Seuls l'énoncé et la configuration de la figure tracée permettront de choisir la meilleure de ces deux options.

1) Calculons  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ .

Les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  n'étant pas colinéaires, il convient d'effectuer une projection orthogonale du vecteur  $\overline{AC}$  sur la droite  $(AB)$ .

D'une part,  $A \in (AB)$  donc  $A$  est son propre projeté orthogonal sur  $(AB)$ . D'autre part,  $ABCD$  est un carré donc  $B$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ . Ainsi,  $\overline{AB}$  est le projeté orthogonal de  $\overline{AC}$  sur  $(AB)$ .



Par conséquent,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = a^2$

2) Calculons  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ .

$ABCD$  est un carré donc les droites  $(BC)$  et  $(BA)$  sont perpendiculaires. Il en résulte que les vecteurs directeurs  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BA}$  respectifs des droites  $(BC)$  et  $(BA)$  sont orthogonaux. Par conséquent,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ .

3) Calculons  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB}$ .

$ABCD$  est un carré de centre  $O$ . Or, les diagonales d'un carré sont perpendiculaires, si bien que l'angle formé par les vecteurs  $\overrightarrow{OC}$  et  $\overrightarrow{OB}$  est un angle droit. De ce fait,  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .

4) Calculons  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO}$ .

$O$  est le centre de  $ABCD$  donc  $O$  est le milieu des diagonales  $[AC]$  et  $[BD]$  du carré. Autrement dit, les points  $A, O$  et  $C$  sont alignés dans cet ordre. Les vecteurs  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AO}$  sont par conséquent colinéaires et de même sens, d'où :

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AO}\| = AC \times AO = AC \times AC/2 = AC^2/2.$$

Or,  $ABCD$  est un carré donc  $BC$  est rectangle en  $B$ . Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, on a  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ .

Par conséquent,  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = AC^2/2 = 2a^2/2 = a^2$ .

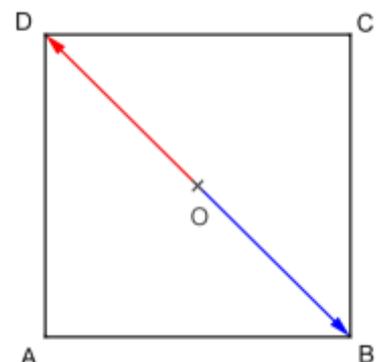
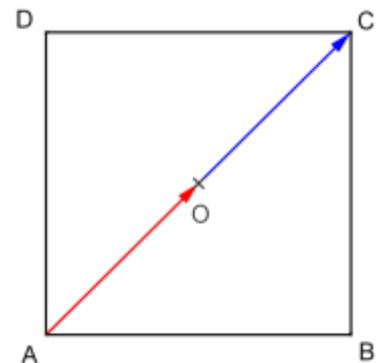
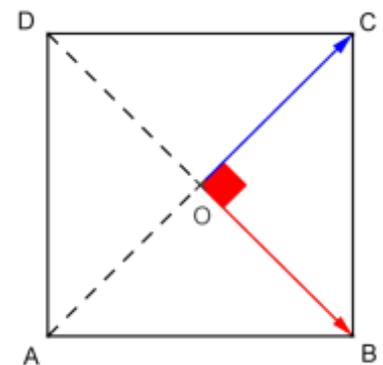
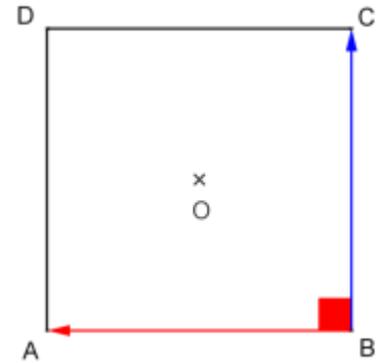
5) Calculons  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ .

$O$  est le milieu de  $[BD]$  donc les vecteurs  $\overrightarrow{OB}$  et  $\overrightarrow{OD}$  sont colinéaires et de **sens contraires**.

$$\text{Ainsi, } \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -\|\overrightarrow{OB}\| \times \|\overrightarrow{OD}\| = -BD/2 \times BD/2 = -BD^2/4$$

Or,  $ABCD$  est un carré donc ses diagonales sont de même mesure ; d'où  $BD = AC$ . Ainsi, d'après ce qui précède,  $BD^2 = AC^2 = 2a^2$ .

Il vient alors que  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = -BD^2/4 = -2a^2/4 = -a^2/2$ .



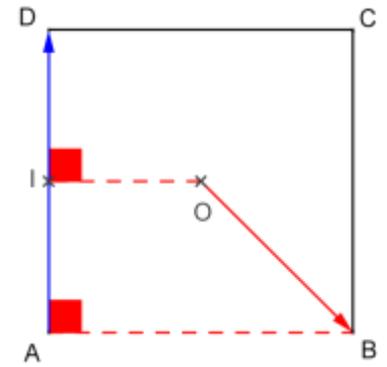
6) Calculons  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB}$ .

Soit  $I$  le milieu de  $AD$ . Alors  $I$  est le projeté orthogonal de  $O$  sur  $(AD)$ . En outre,  $A$  est le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(AD)$ .

Autrement dit,  $\overrightarrow{IA}$  est le projeté orthogonal de  $\overrightarrow{OB}$  sur  $(AD)$ . D'où  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{IA}$ .

Or, les vecteurs  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{IA}$  sont colinéaires et de sens contraires donc  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{IA} = -\|\overrightarrow{AD}\| \times \|\overrightarrow{IA}\| = -AD \times IA = -a \times \frac{a}{2} = -\frac{1}{2}a^2$ .

En conclusion,  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = -a^2/2$ .



**Remarque importante :** Dans cet exercice, on peut également définir un repère orthonormé du plan, par exemple le repère  $(A; \vec{i}; \vec{j})$  avec  $\vec{i} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}$  et  $\vec{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}$ . Dès lors, il suffit de noter les coordonnées des points :  $(0; 0)$ ,  $B(a; 0)$ ,  $C(a; a)$ ,  $D(0; a)$  et  $O(a/2; a/2)$ . Ensuite, il convient de déterminer les coordonnées des vecteurs intervenant dans les produits scalaires.

Le repère  $(A; \vec{i}; \vec{j})$  est orthonormé car :

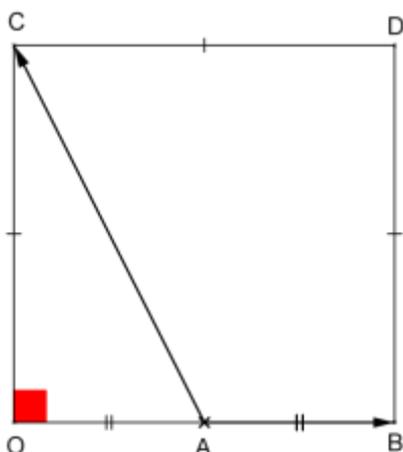
$$\begin{cases} \|\vec{i}\| = \frac{1}{a}\|\overrightarrow{AB}\| = \frac{1}{a} \times a = 1 \\ \|\vec{j}\| = \frac{1}{a}\|\overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{a} \times a = 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} = \frac{1}{a}\overrightarrow{AB} \cdot \frac{1}{a}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{a^2}\underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_{=0} = 0 \end{cases}$$

Calculons par exemple  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB}$ . Les vecteurs  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{OB}$  ont pour coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} -a/2 \\ -a/2 \end{pmatrix}$ . Il vient alors que  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \times (-a/2) + a \times (-a/2) = -a^2/2$ .

### Exercice 9

Pour chacune des figures suivantes, calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

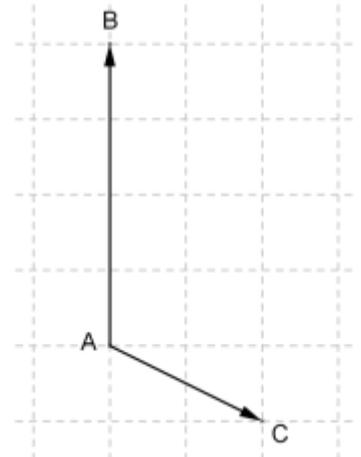
1)  $OBDC$  est un carré de côté 5 et  $A$  est le milieu de  $OB$ .



2)  $ABC$  est un triangle isocèle en  $C$ , tel que  $AB = 4$ .



3) L'unité choisie est le côté d'un carré du quadrillage.



### Correction de l'exercice 9

1) Calculons  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

$BDC$  est un carré donc  $O$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(OB)$ . De plus, comme  $A$  est le milieu de  $[OB]$ ,  $A \in (OB)$ . Autrement dit,  $O$  est le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ .

De plus,  $A \in (AB)$  donc  $A$  est son propre projeté orthogonal sur  $(AB)$ .

Finalement, le projeté orthogonal de  $\vec{AC}$  sur  $(AB)$  est le vecteur  $\vec{AO}$ .

Ainsi,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AO}$ . Comme  $A$  est le milieu de  $[OB]$ ,  $\vec{AB}$  et  $\vec{AO}$  sont colinéaires mais de sens contraires et  $AB = AO = \frac{OB}{2} = \frac{5}{2}$ .

$$\text{Donc } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AO} = -\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AO}\| = -\frac{5}{2} \times \frac{5}{2} = -\frac{25}{4}.$$

2) Calculons  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

Le triangle  $ABC$  est isocèle en  $C$  donc la droite issue de  $C$  et passant par le milieu du segment  $[AB]$  est un axe de symétrie du triangle et en particulier une médiatrice. En notant  $H$  le milieu de  $[AB]$ ,  $H$  est alors le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ .

De plus,  $A \in (AB)$  donc  $A$  est son propre projeté orthogonal sur  $(AB)$ .

Finalement, le projeté orthogonal de  $\vec{AC}$  sur  $(AB)$  est le vecteur  $\vec{AH}$ .

Ainsi,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ . Comme les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  sont colinéaires et de même sens,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \|\vec{AB}\| \times \|\vec{AH}\| = AB \times AH$ .

$$\text{Comme } H \text{ est le milieu de } [AB], \text{ alors } AH = \frac{AB}{2} = \frac{4}{2} = 2. \text{ Donc } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH = 4 \times 2 = 8.$$

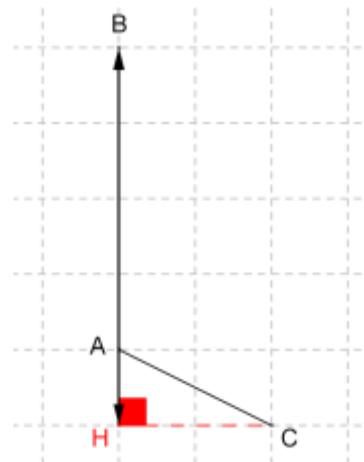
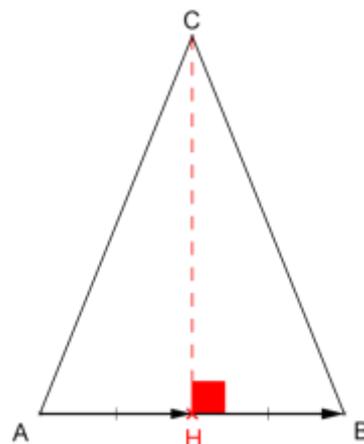
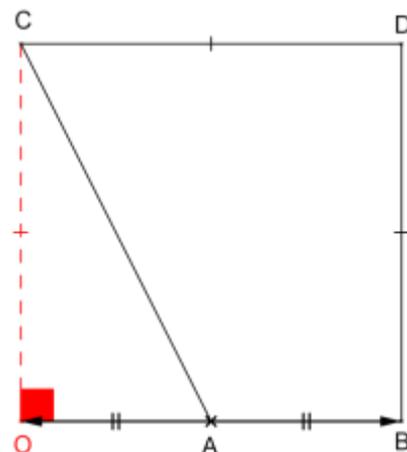
3) Calculons  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ .

Afin d'utiliser le quadrillage, la seule projection orthogonale exploitable simplement est la projection orthogonale sur la droite  $(AB)$ . Notons alors  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$  et remarquons que le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(AB)$  est  $A$  lui-même car  $A \in (AB)$ .

Ainsi,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ . Comme les vecteurs  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  sont colinéaires et de sens contraires, alors  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = -\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AH}\|$ .

Par ailleurs,  $AB = 4$  et  $AH = 1$ .

$$\text{Donc } \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = -\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AH}\| = -4 \times 1 = -4.$$



**Exercice 10**

Soient deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  distincts du vecteur nul. On note  $\alpha$  la mesure en radians de l'angle orienté  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

Illustrer par une figure chacun des cinq cas suivants et calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

- |    |                             |                             |                           |
|----|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------|
| 1) | $\ \vec{u}\  = 5$           | $\ \vec{v}\  = 2$           | $\alpha = \frac{\pi}{4}$  |
| 2) | $\ \vec{u}\  = 3$           | $\ \vec{v}\  = \frac{3}{2}$ | $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ |
| 3) | $\ \vec{u}\  = 4$           | $\ \vec{v}\  = 1$           | $\alpha = \pi$            |
| 4) | $\ \vec{u}\  = \frac{3}{2}$ | $\ \vec{v}\  = \frac{5}{2}$ | $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ |
| 5) | $\ \vec{u}\  = 1$           | $\ \vec{v}\  = 2$           | $\alpha = \frac{\pi}{2}$  |

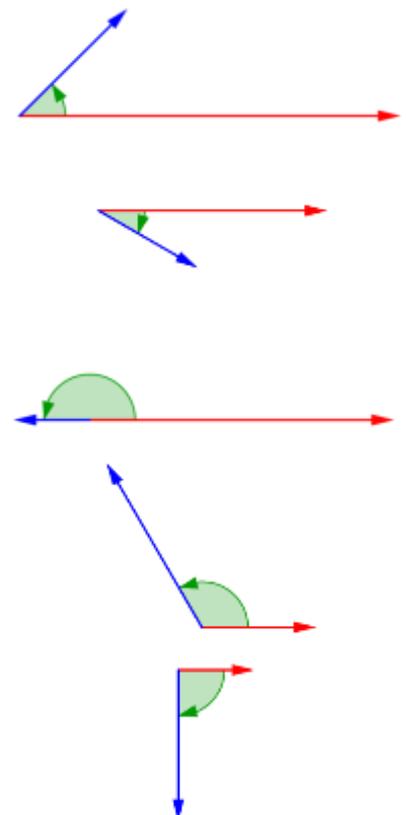
**Correction de l'exercice 10**

**Rappel : Produit scalaire, normes de vecteurs et angle orienté**

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  tels que  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $\vec{v} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$ .

Représentons en rouge le vecteur  $\vec{u}$ , en bleu le vecteur  $\vec{v}$  et en vert l'angle orienté  $(\vec{u}; \vec{v}) = \alpha$  dans le sens trigonométrique.

- 1)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 5 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$
- 2)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 3 \times \frac{3}{2} \times \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{9}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$   
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$
- 3)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 4 \times 1 \times \cos(\pi) = 4 \times (-1)$   
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = -4$
- 4)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$   
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{15}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{8}$
- 5)  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 1 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 0$   
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



**Remarque importante :**

- Si l'angle orienté  $(\vec{u} ; \vec{v})$  forme un angle aigu, alors le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est positif. (cas 1 et 2)
- Si l'angle orienté  $(\vec{u} ; \vec{v})$  forme un angle obtus, alors le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est négatif. (cas 3 et 4)
- Si l'angle orienté  $(\vec{u} ; \vec{v})$  forme un angle droit, alors le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  est nul. (cas 5)

**Exercice 11**

Soient trois points  $A, B$  et  $C$  du plan tels que  $AB = 4, AC = 3$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -10$ . Dans chacun des 3 cas suivants, justifier si les affirmations sont vraies ou fausses.

- 1) Les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés.
- 2)  $\widehat{BAC} = \pi/7$
- 3)  $BC = 2\sqrt{11}$

**Correction de l'exercice 11**

- 1) Si les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés, alors  $|\vec{AB} \cdot \vec{AC}| = AB \times AC$ .  
Or, d'une part  $|\vec{AB} \cdot \vec{AC}| = |-10| = 10$  et d'autre part  $AB \times AC = 4 \times 3 = 12$ . En conséquence,  $|\vec{AB} \cdot \vec{AC}| \neq AB \times AC$ . **L'affirmation est fausse.**
- 2) Si  $\widehat{BAC} = \pi/7$ , alors  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} > 0$  puisque  $\cos(\frac{\pi}{7}) > 0$ .  
Or,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -10$  donc  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} < 0$ . **L'affirmation est fausse.**
- 3) Si  $BC = 2\sqrt{11}$ , alors  $BC^2 = (2\sqrt{11})^2 = 2^2 \times \sqrt{11}^2 = 4 \times 11 = 44$ .  
Or,  $BC^2 = \vec{BC}^2 = \underbrace{(\vec{BA} + \vec{AC})^2}_{\substack{\text{décomposition} \\ \text{par la relation} \\ \text{de Chases}}} = \underbrace{\vec{BA}^2 + \vec{AC}^2 + 2\vec{BA} \cdot \vec{AC}}_{\text{identité remarquable}} = AB^2 + AC^2 \underbrace{- 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}}_{\text{linéarité}}$   
 $= 4^2 + 3^2 - 2 \times (-10) = 16 + 9 + 20 = 45$ . Ainsi,  $BC^2 \neq 44$ . **L'affirmation est fausse.**

**Remarque :** Pour infirmer les deux premières affirmations, on pouvait également utiliser directement l'expression  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ . Ainsi, cette expression aurait permis d'établir que :

$$\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{-10}{4 \times 3} = -\frac{5}{6}$$

A l'aide de la calculatrice,  $\cos(\widehat{BAC}) = -\frac{5}{6} \Leftrightarrow \widehat{BAC} \approx 146^\circ$  (arrondi au degré près par défaut).

## Exercice 12

Soient les points  $A(1; 4)$ ,  $B(-2; -1)$  et  $C(3; 1)$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Donner la mesure en degrés de l'angle  $\widehat{BAC}$ , arrondie au dixième.

### Correction de l'exercice 12

On sait que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ . D'où la relation :

$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$$

- Commençons par calculer le produit scalaire  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 1 \\ -1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{AC}$  a pour coordonnées :  $\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

Il en résulte que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \times 2 + (-5) \times (-3) = -6 + 15 = 9$ .

- Déterminons désormais  $AB$  et  $AC$ .

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

- Calculons maintenant  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ .

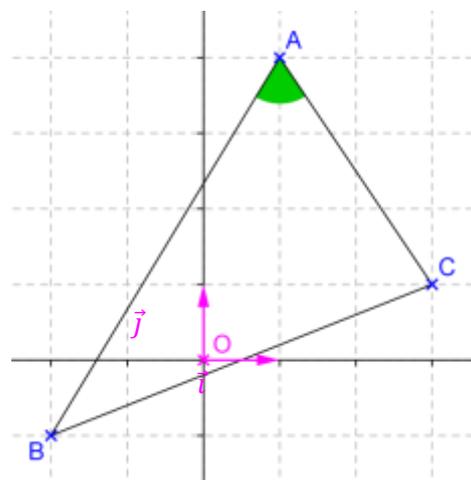
$$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{9}{\sqrt{34} \times \sqrt{13}} = \frac{9}{\sqrt{442}} = \frac{9\sqrt{442}}{442}$$

Dès lors, il résulte que  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \approx 64,7^\circ$  (arrondi au dixième de degré par excès). **L'angle  $\widehat{BAC}$  mesure  $64,7^\circ$  au dixième de degré près.**

## Exercice 13

On dit que quatre points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  forment un quadrangle orthocentrique si chacun de ces points est l'orthocentre du triangle ayant pour sommets les trois autres points.

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points  $A(5; 0)$ ,  $B(-1; -2)$ ,  $C(11; -8)$  et  $D(7; 4)$ . Ces points forment-ils un quadrangle orthocentrique ?



## Correction de l'exercice 13

Pour montrer que les points  $A(5; 0)$ ,  $B(-1; -2)$ ,  $C(11; -8)$  et  $D(7; 4)$  forment un quadrangle orthocentrique, il faut montrer que :

- 1)  $A$  est l'orthocentre du triangle  $BCD$ .
- 2)  $B$  est l'orthocentre du triangle  $ACD$ .
- 3)  $C$  est l'orthocentre du triangle  $ABD$ .
- 4)  $D$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

Les points sont placés dans un repère orthonormé et nous avons :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- 1) Commençons par voir si  $A$  est l'orthocentre du triangle  $BCD$ .

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -6 \times (-4) + 2 \times 12 = 24 + 24 = 48 \neq 0$  donc  $(AB) \not\perp (CD)$ . Autrement dit, le point  $A$  appartient à la hauteur de  $BCD$  issue de  $B$ .

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 6 \times 8 + 8 \times 6 = 48 + 48 = 96 \neq 0$  donc  $(AC) \not\perp (BD)$ . Autrement dit, le point  $B$  appartient à la hauteur de  $BCD$  issue de  $C$ .

Par conséquent,  $A$  est le point de concours de deux hauteurs du triangle  $BCD$  :  $A$  est l'orthocentre de  $BCD$ .

- 2) Voyons si  $B$  est l'orthocentre du triangle  $ACD$ .

D'après ce qui précède,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 48 \neq 0$  donc le point  $B$  appartient à la hauteur de  $ACD$  issue de  $A$ .

D'autre part,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 12 \times 2 + 6 \times 4 = 24 + 24 = 48 \neq 0$  donc le point  $C$  appartient à la hauteur de  $ACD$  issue de  $C$ .

Par conséquent,  $B$  est le point de concours de deux hauteurs du triangle  $ACD$  :  $B$  est l'orthocentre de  $ACD$ .

- 3) Voyons si  $C$  est l'orthocentre du triangle  $ABD$ .

Il a été établi plus haut que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 48 \neq 0$  donc le point  $C$  appartient à la hauteur de  $ABD$  issue de  $D$ .

En outre, d'après ce qui précède,  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 48 \neq 0$  donc le point  $C$  appartient à la hauteur de  $ABD$  issue de  $B$ .

Comme  $C$  est le point de concours de deux hauteurs du triangle  $ABD$ , il résulte que  $C$  est l'orthocentre de  $ABD$ .

- 4) Selon un raisonnement analogue au 3), on montre également que  $D$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

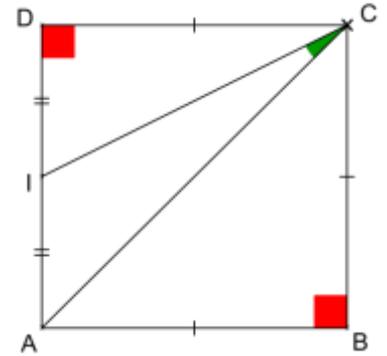
**Conclusion :** Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  forment un quadrangle orthocentrique.

## Exercice 14

Soit un carré  $ABCD$  de côté  $a$ , tel que  $I$  est le milieu de  $[AD]$ . Montrer que la mesure de l'angle  $\widehat{ACI}$  est indépendante de  $a$ .

### Correction de l'exercice 14

$ABCD$  est un carré de côté  $a$  donc le triangle  $ABC$  est rectangle isocèle en  $B$ .  
D'après le théorème de Pythagore, on a :  $CA^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ .



De même, du fait de la nature de  $ABCD$ , et comme  $I$  est le milieu de  $[AD]$ , le triangle  $DCI$  est rectangle en  $D$ . Alors, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$CI^2 = CD^2 + DI^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

Par définition,

$$\vec{CI} \cdot \vec{CA} = \frac{1}{2} (\|\vec{CI}\|^2 + \|\vec{CA}\|^2 - \|\vec{CI} - \vec{CA}\|^2) = \frac{1}{2} (CI^2 + CA^2 - \|\vec{CI} + \vec{AC}\|^2) = \frac{1}{2} (CI^2 + CA^2 - AI^2)$$

Or, comme  $I$  est le milieu de  $AD$ ,  $AI^2 = \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ . Ainsi, on obtient que :

$$\vec{CI} \cdot \vec{CA} = \frac{1}{2} \left( \frac{5a^2}{4} + 2a^2 - \frac{a^2}{4} \right) = \frac{1}{2} (3a^2) = \frac{3a^2}{2}$$

De surcroît,

$$\begin{aligned} \vec{CI} \cdot \vec{CA} &= \|\vec{CI}\| \times \|\vec{CA}\| \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA}) = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} \times \sqrt{2a^2} \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA}) = \sqrt{\frac{a^2}{4}} \times 2a^2 \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA}) \\ &= \sqrt{\frac{a^4}{2}} \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA}) = a^2 \sqrt{\frac{1}{2}} \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA}) \end{aligned}$$

En résumé,  $\vec{CI} \cdot \vec{CA} = \frac{3a^2}{2} = a^2 \sqrt{\frac{5}{2}} \times \cos(\vec{CI}; \vec{CA})$ . Il résulte alors de cette dernière égalité que :

$$\cos(\vec{CI}; \vec{CA}) = \frac{\frac{3a^2}{2}}{a^2 \sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{5}}{2 \times \sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Le cosinus de l'angle  $(\vec{CI}; \vec{CA})$  est constant donc **la mesure de l'angle  $\widehat{ACI}$  est indépendante de la mesure  $a$  du côté du carré  $ABCD$** . En l'occurrence, l'angle mesure toujours  $18,43^\circ$  (arrondi au centième de degré près par défaut).

### Exercice 15

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on donne les points  $A(-1; 2)$  et  $B(3; 4)$ . Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice de  $[AB]$ .

### Correction de l'exercice 15

#### Rappel : Equation cartésienne de droite

Soit une droite  $(d)$  du plan. Il existe 3 réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que  $a \neq 0$  ou  $b \neq 0$  tels que  $(d)$  soit l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  qui vérifient l'équation  $ax + by + c = 0$ . L'équation  $ax + by + c = 0$  est appelée équation cartésienne de  $(d)$ .

Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$  et soit  $(d)$  la médiatrice de  $[AB]$ . Tout point  $M(x; y)$  du plan appartient à  $(d)$  si et seulement si les droites  $(IM)$  et  $(AB)$  sont perpendiculaires. Autrement dit, on a :

$$M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow (IM) \perp (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Or, le point  $I$  a pour coordonnées  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ , c'est-à-dire  $I(1; 3)$ . Il s'ensuit que le vecteur  $\overrightarrow{IM}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_M - x_I \\ y_M - y_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 3 \end{pmatrix}$ . Enfin, le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Par conséquent, on a :

$$M(x; y) \in (d) \Leftrightarrow (IM) \perp (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1) \times 4 + (y - 3) \times 2 = 0$$

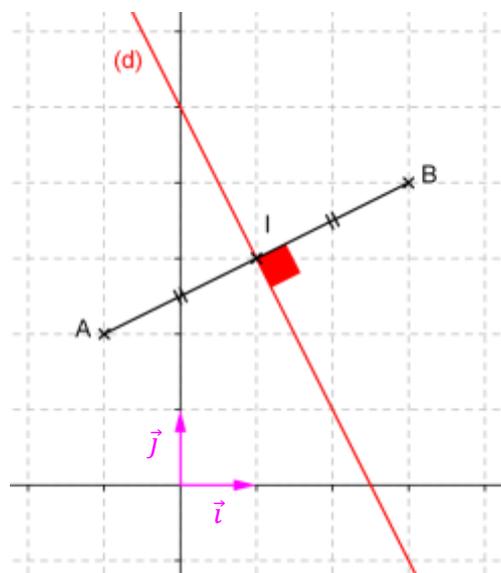
$$\Leftrightarrow 4x - 4 + 2y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2x + y - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0$$

Une équation cartésienne de la médiatrice  $(d)$  de  $[AB]$  est  $2x + y - 5 = 0$ .



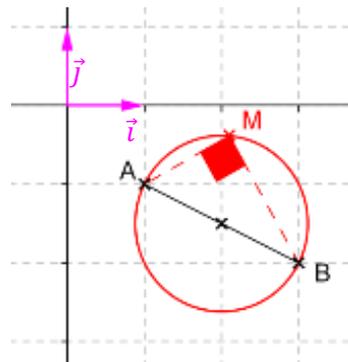
### Exercice 16

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , déterminer une équation du cercle de diamètre  $[AB]$ , sachant que les points  $A$  et  $B$  ont pour coordonnées respectives  $(1; -1)$  et  $(3; -2)$ .

### Correction de l'exercice 16

Tout point  $(x; y)$  du plan appartient au cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$  si et seulement si le triangle  $ABM$  est rectangle en  $M$ . Autrement dit, on a :

$$\begin{aligned} (x; y) \in \mathcal{C} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-3) + (y+1)(y+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - x + 3 + y^2 + 2y + y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 3y + 5 = 0 \end{aligned}$$



Une équation du cercle de diamètre  $[AB]$  est  $x^2 - 4x + y^2 + 3y + 5 = 0$ .

### Exercice 17

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on donne les points  $A(-2; 1)$  et  $B(2; 3)$ . Déterminer une équation de la tangente au cercle de diamètre  $[AB]$  et passant par  $A$ .

### Correction de l'exercice 17

Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ , soit  $\mathcal{C}$  le cercle de diamètre  $[AB]$  et soit  $(T)$  la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A$ .

Tout point  $(o, x; y)$  du plan appartient à  $(T)$  si et seulement si le triangle  $IAM$  est rectangle en  $A$ , c'est-à-dire si et seulement si  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ .

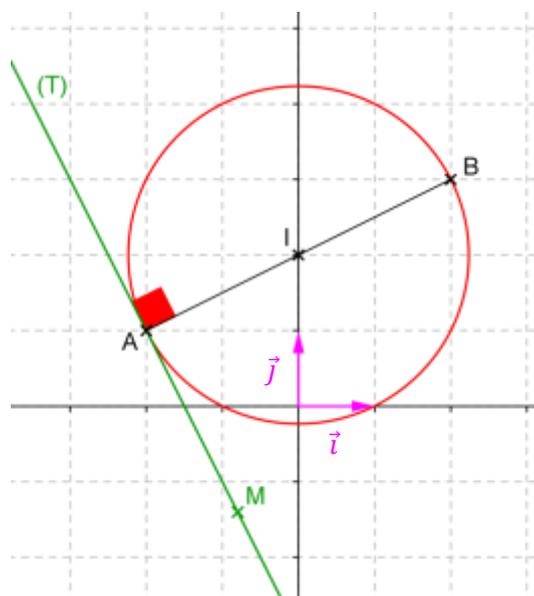
Or,  $I$  est le milieu de  $[AB]$  donc le point  $I$  a pour coordonnées  $(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$ , c'est-à-dire  $I(0; 2)$ .

En outre, les vecteurs  $\overrightarrow{AI}$  et  $\overrightarrow{AM}$  ont pour coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$ .

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} (x; y) \in T &\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow 2(x+2) + 1(y-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x + 4 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  au cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[AB]$  est  $2x + y + 3 = 0$ .



### Exercice 18

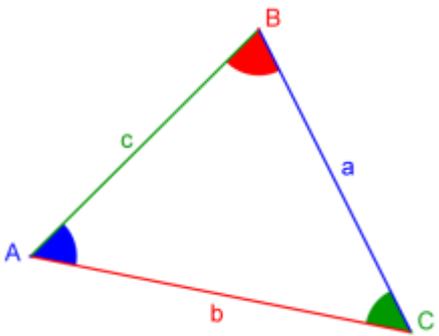
Démontrer que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

### Correction de l'exercice 18

**Rappel : Théorème d'Al-Kashi (également appelé Théorème de Pythagore généralisé)**

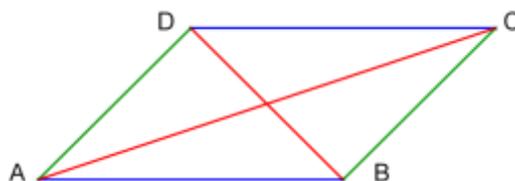
Soit un triangle  $ABC$  quelconque. Alors, on a les relations suivantes :

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$



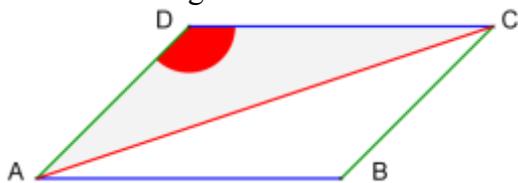
Soit un parallélogramme  $ABCD$ .

Démontrons que  $\frac{AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2}{\text{somme des carrés des côtés du parallélogramme}} = \frac{AC^2 + BD^2}{\text{somme des carrés des diagonales du parallélogramme}}$ .



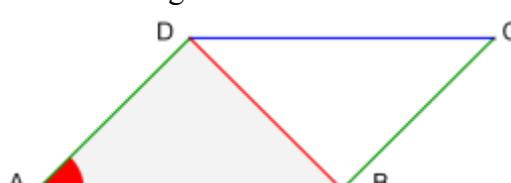
D'après le théorème d'Al-Kashi, on a :

- dans le triangle  $ADC$  :



$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \times AD \times DC \times \cos \hat{D}$$

- dans le triangle  $ABD$  :



$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \times AD \times AB \times \cos \hat{A}$$

En additionnant membre à membre ces égalités, on obtient :

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \times AD \times DC \times \cos \hat{D} + AD^2 + AB^2 - 2 \times AD \times AB \times \cos \hat{A}$$

Or,  $ABCD$  est un parallélogramme donc ses côtés opposés sont de même longueur et deux angles consécutifs sont supplémentaires. Autrement dit, on a en particulier les relations suivantes :

- $AD = BC$
- $AB = DC$
- $\hat{A} + \hat{D} = \pi$

Ainsi,  $AC^2 + BD^2 = AD^2 + DC^2 + BC^2 + AB^2 - 2 \times AD \times DC \times (\cos \hat{D} + \cos(\pi - \hat{D}))$

Or,  $\cos(\pi - \hat{D}) = -\cos \hat{D}$  donc  $\cos \hat{D} + \cos(\pi - \hat{D}) = \cos \hat{D} - \cos \hat{D} = 0$ .

Par conséquent,  $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ . Autrement dit, la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

### Exercice 19

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on donne les points  $A(3; 1)$  et  $B(-1; 3)$ . Déterminer une équation cartésienne des tangentes au cercle de diamètre  $[AB]$ , passant par  $C(-2; 5)$ .

### Correction de l'exercice 19

Notons  $I$  le milieu de  $[AB]$ ,  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $I$  et de diamètre  $[AB]$  et  $(t)$  la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $H(x; y)$ , passant par  $C(-2; 5)$ .

$(t)$  est la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $H$ , passant par  $C$  donc  $H$  est le point d'intersection de  $(t)$  et  $\mathcal{C}$ . Par conséquent, les droites  $(CH)$  et  $(IH)$  sont orthogonales et  $IH$  est un rayon du cercle  $\mathcal{C}$ . Autrement dit,  $H$  est le point d'intersection de  $(t)$  et  $\mathcal{C}$  si et seulement si  $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{IH} = 0$  et  $HI = AI$ .

$I$  le milieu de  $[AB]$  donc  $I$  a pour coordonnées  $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}\right)$ , c'est-à-dire  $I(1; 2)$ .

$$\text{D'une part, } \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{IH} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) + (y-5)(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 2x - 2 + y^2 - 2y - 5y + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + y^2 - 7y + 8 = 0$$

$$\text{D'autre part, } HI = AI \Leftrightarrow HI^2 = AI^2 \Leftrightarrow (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 = (x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (3 - 1)^2 + (1 - 2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 2^2 + (-1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = 5 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$$

$H$  est le point d'intersection de  $(t)$  et  $\mathcal{C}$  donc ses coordonnées vérifient le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 + x + y^2 - 7y + 8 = 0 \text{ (L1)} \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0 \text{ (L2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0 \text{ (L2} \rightarrow \text{L1)} \\ 3x - 7y + 4y + 8 = 0 \text{ (L1 - L2} \rightarrow \text{L2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0 \text{ (L1)} \\ 3x - 3y + 8 = 0 \text{ (L2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0 \text{ (L1)} \\ x = \frac{3y - 8}{3} \text{ (L2)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \text{ (L2} \rightarrow \text{L1)} \\ \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 - 2 \times \left(y - \frac{8}{3}\right) + y^2 - 4y = 0 \text{ (L1} \rightarrow \text{L2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \text{ (L1)} \\ y^2 - \frac{16}{3}y + \frac{64}{9} - 2y + \frac{16}{3} + y^2 - 4y = 0 \text{ (L2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ 9y^2 - 48y + 64 - 18y + 48 + 9y^2 - 36y = 0 \quad (9 \times L2 \rightarrow L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ 18y^2 - 102y + 112 = 0 \quad (L2) \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ 9y^2 - 51y + 56 = 0 \quad (L2/2 \rightarrow L2) \end{cases}$$

Soit  $\Delta$  le discriminant du trinôme  $9y^2 - 51y + 56$  du second degré d'inconnue  $y$ .

$$\Delta = (-51)^2 - 4 \times 9 \times 56 = 585 = 9 \times 65$$

$\Delta > 0$  donc le trinôme  $9y^2 - 51y + 56$  admet deux racines réelles distinctes  $y_1$  et  $y_2$ .

$$y_1 = \frac{-(-51) - \sqrt{9 \times 65}}{2 \times 9} = \frac{51 - 3\sqrt{65}}{18} = \frac{17 - \sqrt{65}}{6}$$

$$y_2 = \frac{-(-51) + \sqrt{9 \times 65}}{2 \times 9} = \frac{51 + 3\sqrt{65}}{18} = \frac{17 + \sqrt{65}}{6}$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ 9y^2 - 51y + 56 = 0 \quad (L2/2 \rightarrow L2) \end{cases} \quad \begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \text{ ou } y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \quad (L2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - \frac{8}{3} \quad (L1) \\ y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \text{ ou } y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \quad (L2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \text{ ou } y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = y_1 - \frac{8}{3} \text{ ou } x_2 = y_2 - \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} - \frac{8}{3} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} - \frac{8}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} - \frac{16}{6} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} - \frac{16}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \\ x_1 = \frac{1 - \sqrt{65}}{6} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y_2 = \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{65}}{6} \end{cases}$$

Il existe donc deux points  $H_1$  et  $H_2$  d'intersection de  $(t)$  et  $\mathcal{C}$ , de coordonnées respectives :

$$\left( \frac{1 - \sqrt{65}}{6} ; \frac{17 - \sqrt{65}}{6} \right) \text{ et } \left( \frac{1 + \sqrt{65}}{6} ; \frac{17 + \sqrt{65}}{6} \right)$$

Déterminons désormais une équation cartésienne de chacune des tangentes  $(t_1)$  et  $(t_2)$  passant respectivement par  $H_1$  et  $H_2$ .

$M(x_M ; y_M) \in (t_1)$  si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{CM}$  et  $\overrightarrow{CH_1}$  sont colinéaires et  $M(x_M ; y_M) \in (t_2)$  si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{CM}$  et  $\overrightarrow{CH_2}$  sont colinéaires.

**Rappel : Vecteurs colinéaires**

Dans un repère, deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  non nuls sont colinéaires si, et seulement si,  $xy' - x'y = 0$ .

L'expression  $xy' - x'y$  est le **déterminant** des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et on note  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$ .

- Les vecteurs  $\overrightarrow{CM}$  et  $\overrightarrow{CH_1}$  ont pour coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} x_M + 2 \\ y_M - 5 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{65}}{6} + 2 \\ \frac{17-\sqrt{65}}{6} - 5 \end{pmatrix}$ .

$M(x_M; y_M) \in (t_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$  et  $\overrightarrow{CH_1}$  colinéaires

$$\Leftrightarrow (x_M + 2) \left( \frac{17 - \sqrt{65}}{6} - 5 \right) - (y_M - 5) \left( \frac{1 - \sqrt{65}}{6} + 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{17 - \sqrt{65}}{6} - 5 \right) x_M + \frac{17 - \sqrt{65}}{3} - 10 - \left( \frac{1 - \sqrt{65}}{6} + 2 \right) y_M + \frac{5 - 5\sqrt{65}}{6} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-13 - \sqrt{65}}{6} x_M + \frac{-13 + \sqrt{65}}{6} y_M + \frac{34 - 2\sqrt{65}}{6} + \frac{5 - 5\sqrt{65}}{6} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-13 - \sqrt{65}}{6} x_M + \frac{-13 + \sqrt{65}}{6} y_M + \frac{39 - 7\sqrt{65}}{6} = 0$$

- Les vecteurs  $\overrightarrow{CM}$  et  $\overrightarrow{CH_2}$  ont pour coordonnées respectives  $\begin{pmatrix} x_M + 2 \\ y_M - 5 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{65}}{6} + 2 \\ \frac{17+\sqrt{65}}{6} - 5 \end{pmatrix}$ .

$M(x_M; y_M) \in (t_2) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}$  et  $\overrightarrow{CH_2}$  colinéaires

$$\Leftrightarrow (x_M + 2) \left( \frac{17 + \sqrt{65}}{6} - 5 \right) - (y_M - 5) \left( \frac{1 + \sqrt{65}}{6} + 2 \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{17 + \sqrt{65}}{6} - 5 \right) x_M + \frac{17 + \sqrt{65}}{3} - 10 - \left( \frac{1 + \sqrt{65}}{6} + 2 \right) y_M + \frac{5 + 5\sqrt{65}}{6} + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-13 + \sqrt{65}}{6} x_M + \frac{-13 - \sqrt{65}}{6} y_M + \frac{34 + 2\sqrt{65}}{6} + \frac{5 + 5\sqrt{65}}{6} = 0$$

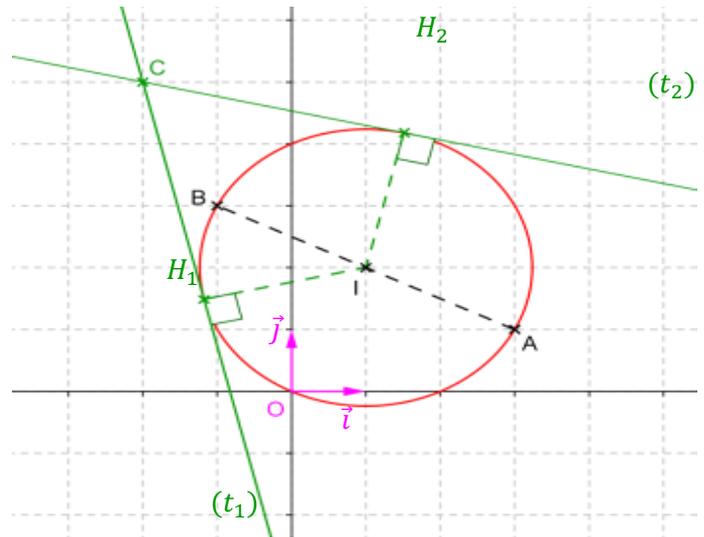
$$\Leftrightarrow \frac{-13 + \sqrt{65}}{6} x_M + \frac{-13 - \sqrt{65}}{6} y_M + \frac{39 + 7\sqrt{65}}{6} = 0$$

En conclusion, les tangentes  $(t_1)$  et  $(t_2)$  au cercle  $\mathcal{C}$  passant par  $C$  ont pour équations cartésiennes respectives :

$$\frac{-13 - \sqrt{65}}{6}x + \frac{-13 + \sqrt{65}}{6}y + \frac{39 - 7\sqrt{65}}{6} = 0$$

et

$$\frac{-13 + \sqrt{65}}{6}x + \frac{-13 - \sqrt{65}}{6}y + \frac{39 + 7\sqrt{65}}{6} = 0$$



### Exercice 20

Soit un triangle  $ABC$ . On note  $O$  le centre du cercle circonscrit à ce triangle,  $H$  le point du plan défini par  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  et  $G$  le point du plan tel que  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

- 1) Démontrer que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .
- 2) Démontrer que  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ .
- 3) Démontrer que les points  $O$ ,  $H$  et  $G$  sont alignés.

### Correction de l'exercice 20

- 1) Démontrons que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

Pour montrer que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ , commençons par montrer que  $H$  appartient à la hauteur du triangle  $ABC$ , issue de  $A$ , autrement dit commençons par montrer que  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left( \underbrace{\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH}}_{\text{cf 1}} \right) \cdot \overrightarrow{BC} = \left( \overrightarrow{AO} + \underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 2}} \right) \cdot \overrightarrow{BC} = \left( \underbrace{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 3}} \right) \cdot \left( \underbrace{\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 1}} \right) \\ &= \left( \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \right) \cdot \left( \underbrace{-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 4}} \right) = \left( \underbrace{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}}_{\text{cf 5}} \right) \cdot \left( \underbrace{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}}_{\text{cf 5}} \right) = \underbrace{\overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OB}^2}_{\text{cf 6}} = C^2 - B^2 = \underbrace{0}_{\text{cf 7}} \end{aligned}$$

Explications :

- 1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le point  $O$ .
- 2- On utilise l'égalité de l'énoncé définissant le point  $H$ , à savoir  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .
- 3- La somme de vecteurs opposés est égale au vecteur nul ; ici,  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$ .

- 4- On met en évidence l'opposée du vecteur opposé ; ici,  $\overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$ .
- 5- On permute les vecteurs pour mettre en évidence le produit scalaire  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ .
- 6- On applique l'identité remarquable  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
- 7-  $O$  est le centre du cercle circonscrit au triangle  $ABC$  donc  $OA = OB = OC$ . D'où  $OA^2 = OB^2 = OC^2$ .

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  donc  $H$  appartient à la hauteur du triangle  $ABC$ , issue de  $A$ .

Par un raisonnement analogue, on montre que  $H$  appartient à la hauteur du triangle  $ABC$ , issue de  $B$ . En effet :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left( \underbrace{\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OH}}_{\text{cf 1}} \right) \cdot \overrightarrow{AC} = \left( \underbrace{\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 2}} \right) \cdot \overrightarrow{AC} = \left( \underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 3}} \right) \cdot \left( \underbrace{\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 1}} \right) \\ &= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) \cdot \left( \underbrace{-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}_{\text{cf 4}} \right) = \left( \underbrace{\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}}_{\text{cf 5}} \right) \cdot \left( \underbrace{\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}}_{\text{cf 5}} \right) = \underbrace{\overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OA}^2}_{\text{cf 6}} = \underbrace{OC^2 - OA^2}_{\text{cf 7}} = 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  donc  $H$  appartient à la hauteur du triangle  $ABC$ , issue de  $B$ .

Par conséquent,  $H$  est le point de concours de deux hauteurs du triangle  $ABC$  :  $H$  est l'orthocentre de  $ABC$ .

2) Démontrons que  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

Pour montrer que  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ABC$ , commençons par montrer que  $G$  appartient à la médiane du triangle  $ABC$ , issue de  $A$ .

Notons  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  les milieux respectifs des segments  $[BC]$ ,  $[AC]$  et  $[AB]$ .

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C}}_{\text{cf 1}} = 3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} + \underbrace{\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}}_{\text{cf 2}} = 3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A}$$

Explications :

- 1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le milieu  $A'$  de  $[BC]$ .
- 2-  $A'$  est le milieu de  $[BC]$  donc  $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$ .

Or, par définition du point  $G$ ,  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$  donc  $3\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} = \vec{0}$ . Autrement dit, les vecteurs  $\overrightarrow{GA'}$  et  $\overrightarrow{A'A}$  sont colinéaires : les points  $G$ ,  $A'$  et  $A$  sont alignés. Comme  $(A'A)$  désigne la médiane du triangle  $ABC$ , issue de  $A$ , on en déduit que  $G \in (A'A)$ .

Par un raisonnement analogue, on montre que  $G$  appartient à la médiane du triangle  $ABC$ , issue de  $B$ . En effet :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \underbrace{\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'C}}_{\text{cf 1}} = 3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} + \underbrace{\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C}}_{\text{cf 2}} = 3\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B}$$

Explications :

- 1- On utilise la relation de Chasles en introduisant le milieu  $B'$  de  $[AC]$ .
- 2-  $B'$  est le milieu de  $[AC]$  donc  $\overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{B'C} = \vec{0}$ .

Comme, par définition du point  $G$ ,  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ , il vient que  $3\vec{GB'} + \vec{B'B}$ . Autrement dit, les vecteurs  $\vec{GB'}$  et  $\vec{B'B}$  sont colinéaires : les points  $G$ ,  $B'$  et  $B$  sont alignés. Comme  $(B'B)$  désigne la médiane du triangle  $ABC$ , issue de  $B$ , on en déduit que  $G \in (B'B)$ .

Par conséquent,  $G$  appartient à deux médianes du triangle  $ABC$  :  $G$  est le centre de gravité de  $ABC$ .

3) Démontrer que les points  $O$ ,  $H$  et  $G$  sont alignés.

Par définition,  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ . En utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\vec{OH} = \vec{OG} + \vec{GA} + \vec{OG} + \vec{GB} + \vec{OG} + \vec{GC} = 3\vec{OG} + \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 3\vec{OG} \text{ car } \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}.$$

Ainsi, la colinéarité des vecteurs  $\vec{OH}$  et  $\vec{OG}$  prouve l'alignement des points  $O$ ,  $H$  et  $G$ . Autrement dit, **dans un triangle, l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit sont 3 points alignés** (voire confondus dans certains cas particuliers).

**Remarque :** Ces 3 points appartiennent à une même droite, appelée « droite d'Euler ».

### Exercice 21

et  $B$  sont deux points du plan tels que  $AB = 4$ .  $(d)$  désigne une droite ne passant ni par  $A$ , ni par  $B$ .  $M$  est un point libre de  $(d)$ . Déterminer la position du point  $M$  de sorte que  $MA^2 + MB^2$  soit minimale.

### Correction de l'exercice 21

Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$ .

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 \\ &= (\vec{MI} + \vec{IA})^2 + (\vec{MI} + \vec{IB})^2 \\ &= \left(\vec{MI} - \frac{1}{2}\vec{AB}\right)^2 + \left(\vec{MI} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right)^2 \\ &= \vec{MI}^2 - \vec{MI} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AB}^2 + \vec{MI}^2 + \vec{MI} \cdot \vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AB}^2 \\ &= 2\vec{MI}^2 + \frac{1}{2}\vec{AB}^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} \times 4^2 \\ &= MI^2 + 8 \end{aligned}$$

$MA^2 + MB^2$  est donc minimale quand  $MI^2$  est minimale, c'est-à-dire quand  $(MI)$  et  $(d)$  sont perpendiculaires.

