

Suites géométriques et calculs d'intérêts

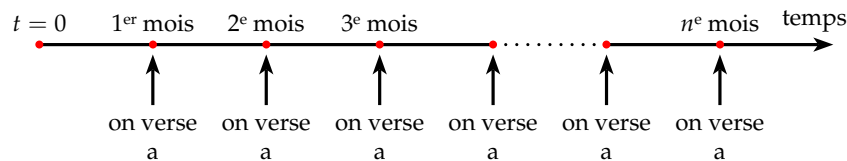
1 Calculer le capital accumulé après n mensualités

On verse une somme d'argent fixe chaque mois rémunérée à taux fixe (type plan épargne logement). Le compte est bloqué, c'est à dire que vous ne pouvez pas retirer de l'argent de ce compte pendant un temps donné (par exemple 5 ans). Le but est de calculer le capital accumulé après avoir versé un certain nombre de mensualités.

Pour cela, on pose :

- C_n : capital après n mensualités
- t : Taux d'intérêt mensuel (taux annuel divisé par 12)
- n : nombre de mensualités
- a : montant de la mensualité

On peut représenter la situation par le schéma suivant :



Quand on place un capital a à un taux d'intérêt mensuel de t pendant n mois, le capital accumulé C est de :

$$C = a(1 + t)^n$$

Donc :

- Pour la 1^{re} mensualité a , on a $(n - 1)$ mois d'intérêt, soit un capital accumulé de : $a(1 + t)^{n-1}$
- Pour la 2^e mensualité a , on a $(n - 2)$ mois d'intérêt, soit un capital accumulé de : $a(1 + t)^{n-2}$

- Pour la 3^e mensualité a , on a $(n - 3)$ mois d'intérêt, soit un capital accumulé de : $a(1 + t)^{n-3}$
- Pour la $(n - 1)^e$ mensualité a , on a 1 mois d'intérêt, soit un capital accumulé de : $a(1 + t)^1$
- Pour la n^e mensualité a , on a 0 mois d'intérêt, soit un capital accumulé de : $a(1 + t)^0 = a$

Donc le capital C_n , après n mensualité est de :

$$C_n = a[1 + (1 + t)^1 + (1 + t)^2 + \dots + (1 + t)^{n-2} + (1 + t)^{n-1}]$$

Il s'agit donc de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme a et de raison $(1 + t)$, on a donc :

$$C_n = a \frac{1 - (1 + t)^n}{1 - (1 + t)}$$

Ce qui se simplifie en :

$$C_n = a \frac{(1 + t)^n - 1}{t}$$

Application numérique :

On place tous les mois 50 € à 3 % annuel. Quelle somme possède-t-on au bout de 5 ans.

On a donc :

- $a = 50$
- $t = \frac{3}{12} = 0,25\%$ donc $t = 0,0025$
- $n = 5 \times 12 = 60$ mensualités

On obtient donc : $C_{60} = 50 \times \frac{1,0025^{60} - 1}{0,0025} \simeq 3\,232,34 \text{ €}$

Le montant des intérêts s'élève donc à : $3232,34 - 60 \times 50 \simeq 232,34 \text{ €}$

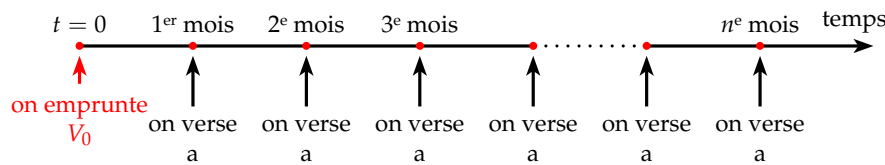
2 Calculer la mensualité à rembourser sur n mensualités pour un emprunt donné

On emprunte une somme de V_0 à la banque, on cherche à déterminer la mensualité à payer pour rembourser cet emprunt sur n mois.

on pose alors :

- a : le montant de la mensualité
- V_0 : le capital emprunté
- n : le nombre de mensualités
- t : le taux mensuel de l'emprunt (taux annuel divisé par 12)

On alors le schéma suivant :



Si V_0 avait été placé au même taux, le capital accumulé au bout de n mois aurait été de :

$$V_0(1+t)^n$$

Si l'on verse tous les mois a , le capital accumulé au bout de n mois serait de :

$$a \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

Comme l'opération doit être identique, on a :

$$V_0(1+t)^n = a \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

En isolant a , on a :

$$a = V_0 \frac{t(1+t)^n}{(1+t)^n - 1}$$

En divisant par $(1+t)^n$, on obtient la formule :

$$a = V_0 \frac{t}{1 - (1+t)^{-n}}$$

Application numérique :

On emprunte 40 000 € sur 3 ans à 4,5 % annuel. Que doit-on rembourser chaque mois ?

On a donc :

- $V_0 = 40\,000$
- $t = \frac{4,5}{12} = 0,375\%$ donc $t = 0,00375$
- $n = 3 \times 12 = 36$ mensualités

On obtient donc : $a = 40\,000 \times \frac{0,00375}{1 - 1,00375^{-36}} \simeq 1\,189,88 \text{ €}$

Le montant des intérêts s'élève donc à : $36 \times 1\,189,88 - 40\,000 \simeq 2\,835,68 \text{ €}$